

Parameterstudie über die Ergiebigkeit einer Zentrifuge aus porösem Material

Diplomarbeit Nr. 96/1

Bettina Albers

Juli 1996

Betreuer: Prof. Dr.-Ing. K. Wilmanski



Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Nicht-inertiale Bezugssysteme	4
2.1	Motivation	4
2.2	Relativität der Bewegung	6
2.2.1	Zur Relativität	6
2.2.2	Die kinematische Bedeutung des Tensors \mathbf{O}	6
2.3	Die Bewegungsgleichung des Massenpunktes	12
2.3.1	Allgemeines	12
2.3.2	Bewegungsgleichungen im nicht-inertialen Bezugssystem	18
2.3.3	Ergebnisse für den Massenpunkt	25
2.4	Kontinuum	26
2.4.1	Cauchy'scher Erhaltungssatz der Bewegungsgröße im inertialen Bezugssystem	27
2.4.2	Transformation in ein nicht-inertiales Bezugssystem	28
2.4.3	Das Spannungsglied $\operatorname{div} \mathbf{T}$	28
2.4.4	Ergebnisse für das Kontinuum	31

3	Grundlagen für zweikomponentige Körper	33
3.1	Mikroskopische und makroskopische Betrachtungsweise	34
3.2	Mischungstheorie	35
3.3	Felder	37
3.4	Bilanzgleichungen im inertialen Bezugssystem	38
3.4.1	Flüssigkeit	38
3.4.2	Skelett	39
3.4.3	Porosität	39
3.5	Herleitung der Bilanzgleichungen	40
3.5.1	Massenerhaltung	40
3.5.2	Bewegungsgröße	43
3.5.3	Porosität	44
3.6	Stoffgesetze	50
3.6.1	Beschleunigung von Skelett und Fluid	51
3.6.2	Spannung im Skelett	53
3.6.3	Spannung in der Flüssigkeit	55
3.6.4	Abschätzung der Größenordnung von Π	59
4	Zentrifuge	62
4.1	Transformation der Feldgleichungen ins nicht-inertiale Bezugssystem	62
4.2	Ansätze	64
4.3	Massenbilanz	66
4.4	Impulsbilanz	67
4.5	Lösung der DGL	75
4.6	Randbedingungen	79
4.7	Einsetzen der Randbedingungen	82
5	Parameterstudie	83
6	Schlußbemerkung	89

Kapitel 1

Einführung

Schon im alten Ägypten (ca. 1500 v. Chr.) sind erste Versuche unternommen worden, Feststoffgemische zu trennen. So sind von den Ägyptern z.B. Malereien über das Windsichten bekannt, wo aufgrund der unterschiedlichen Dichte und Kornform eine Trennung der Spreu vom Weizen erfolgt.

Die Anfänge über den Einsatz von Zentrifugen geht auf das Jahr 1836 zurück. 1876 wurde die erste Zentrifuge gebaut, um Feststoffe von Flüssigkeiten zu trennen. Der Antrieb der Zentrifugen geschah damals noch mit Pferden.

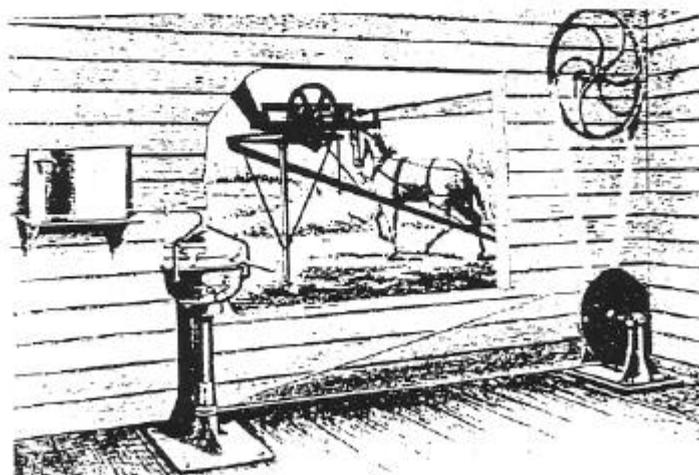
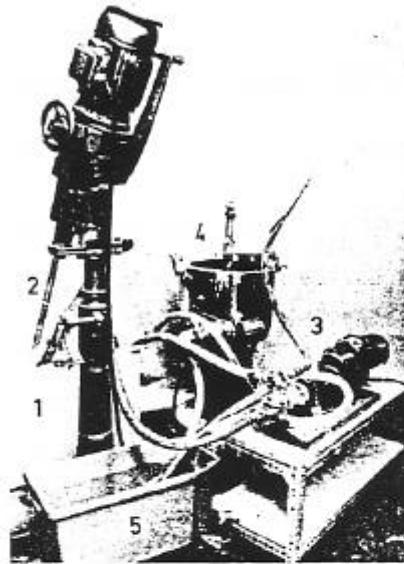


Abb. 1.1 Pferdeantrieb eines Laval Separators (um 1880) [aus 7]

In der Zwischenzeit hat sich Gestalt und Anwendungsgebiet der Zentrifugen immer

weiter entwickelt. Es gibt auf dem Markt eine große Anzahl unterschiedlicher Zentrifugentypen für viele Trennprobleme.

In dieser Arbeit wird die Trennung eines Feststoffes von einer Flüssigkeit behandelt. Dazu benutzt man heute hauptsächlich motorbetriebene Überlaufzentrifugen.



- 1 Vorratsbehälter
- 2 Rührer
- 3 Pumpe
- 4 Überlaufzentrifuge
- 5 Wasserauffangbehälter

Abb. 1.2 Versuchsanlage einer Überlaufzentrifuge [aus 7]

Mit dem Rührer werden die Feststoffteilchen dispergiert, um ein Aussedimentieren zu verhindern. Über Schlauchleitungen fördert die Pumpe das Gemisch in die Zentrifuge. Nach dem Trennvorgang fließt das Wasser in den Auffangbehälter, während der Feststoff in der Zentrifuge verbleibt.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, die Ergiebigkeit einer Zentrifuge aus porösem Material in Abhängigkeit von der Drehgeschwindigkeit und der Durchlässigkeit des porösen Körpers zu bestimmen.

Die Untersuchungen an einer Zentrifuge nimmt man zweckmäßigerweise in einem nicht-inertialen Bezugssystem vor. Deshalb werden in Kapitel 2, nach der Behandlung einiger Grundlagen, die Bewegungsgleichungen vom inertialen in ein nicht-inertiales Bezugssystem transformiert. Und zwar geschieht dies der Einfachheit halber zunächst für den Massenpunkt, um dann auf das Kontinuum einzugehen.

Kapitel 3 stellt die Grundlagen für zweikomponentige Körper dar. Es werden die Felder definiert und die benötigten Feldgleichungen aufgestellt und hergeleitet. Zur Vervollständigung werden Stoffgesetze angegeben, die nicht mehr allgemeingültig sind.

Für die Betrachtungen an der Zentrifuge werden in Kapitel 4 zunächst die Feldgleichungen ins nicht-inertiale Bezugssystem transformiert. Mithilfe der Bilanzgleichungen wird dann eine Bestimmungsgleichung für die Ergiebigkeit der Zentrifuge entwickelt. Dabei handelt es sich um eine gewöhnliche Differentialgleichung.

Die Lösung dieser Gleichung war mit Schwierigkeiten verbunden, weil wegen der großen Exponentenunterschiede in den Parametern die Abhängigkeit zwischen Drehgeschwindigkeit und Ergiebigkeit wegfiel. Eine Lösung dieses Problems ist der Beweis, daß einige Terme der Gleichung vernachlässigt werden können, weil sie keinen Einfluß auf die Lösung haben. Dadurch ergibt sich eine Gleichung für die Ergiebigkeit, die nach Einsetzen der angegebenen Randbedingungen analytisch lösbar ist.

Anhand dieser Gleichung wird als Abschluß dieser Arbeit in Kapitel 5 eine Parameterstudie durchgeführt, um einen Zusammenhang zwischen Ergiebigkeit, Drehgeschwindigkeit und Durchlässigkeit zu zeigen.

Kapitel 2

Nicht-inertiale Bezugssysteme

2.1 Motivation

In der Newtonschen Mechanik bedeutet die Existenz eines absoluten Raumes und einer absoluten Zeit die Voraussetzung jeglicher Physik. Wir gehen also davon aus, daß es einen Raum gibt, in dem alle Vorgänge stattfinden und in dem die Dinge ihre Abstände haben. Genauso gibt es die absolute Zeit, in der jede Veränderung und jeder Vorgang „seine Zeit“ hat, unabhängig davon, wo er im Raum stattfindet. Ohne die Einwirkung einer Außenkraft verharrt in diesem Raum jeder Körper in Ruhe oder er bewegt sich gleichförmig auf einer geraden Linie.

Zwei Beobachter (\bullet) und ($*$) betrachten nun zwei Ereignisse A und B . Deren Lage im Raum wird für den (\bullet)-Beobachter mit den Ortsvektoren \mathbf{r}_A und \mathbf{r}_B beschrieben, für den ($*$)-Beobachter mit ${}^*\mathbf{r}_A$ und ${}^*\mathbf{r}_B$. Als Zeiten der Ereignisse mißt der (\bullet)-Beobachter die Zeiten t_A und t_B , der ($*$)-Beobachter mißt *t_A und *t_B .

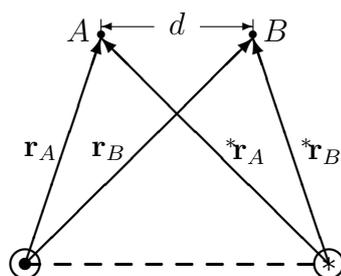


Abb. 2.1 Beobachtung von Ereignissen im absoluten Raum

Wir können den absoluten räumlichen Abstand d der beiden Ereignisse auch relativ zu den beiden Bezugssystemen angeben, mit

$$d = |\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B| = |{}^*\mathbf{r}_A - {}^*\mathbf{r}_B|. \quad (2.1)$$

Durch die Isometrie der beiden relativen Abstände, die zu einer Äquivalenzklasse gehören, ergibt sich ein Zusammenhang zwischen den Größen des (\bullet)-Beobachters und den Größen des ($*$)-Beobachters. Benutzen wir nämlich, daß

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|^2 &= (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \cdot (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \\ &= ({}^*\mathbf{r}_A - {}^*\mathbf{r}_B) \cdot ({}^*\mathbf{r}_A - {}^*\mathbf{r}_B), \end{aligned} \quad (2.2)$$

so folgt daraus, wie wir später zeigen,

$$\exists_{\mathbf{O}(t)} \quad {}^*\mathbf{r}_A - {}^*\mathbf{r}_B = \mathbf{O}(t)(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B), \quad (2.3)$$

mit

$$\mathbf{O}^T = \mathbf{O}^{-1}, \quad (2.4)$$

sowie

$$\exists_{\mathbf{d}(t)} \quad \boxed{{}^*\mathbf{r} = \mathbf{O}(t)\mathbf{r} + \mathbf{d}(t)}. \quad (2.5)$$

Genauso muß natürlich auch ein Isochronismus vorhanden sein, sodaß gilt

$$t_A - t_B = {}^*t_A - {}^*t_B. \quad (2.6)$$

Dies wollen wir hier jedoch nicht weiter betrachten.

2.2 Relativität der Bewegung

2.2.1 Zur Relativität

Die allgemeine Bewegung des Massenpunktes wird beschrieben durch

$${}^*\mathbf{r} = \mathbf{O}\mathbf{r} + \mathbf{d}, \quad (2.7)$$

wobei \mathbf{O} für eine Drehung und \mathbf{d} für eine translatorische Bewegung steht. Man kann diese Bewegung – wie folgende Abbildung verdeutlichen soll – auf zweierlei Weise darstellen:

a) Bewegung des Punktes M im Raum

b) Bewegung des Raumes bzgl. M



Abb. 2.2 Relativität der Bewegung

Wir werden später sehen, daß die Bewegung im ersten Fall durch eine Beschleunigung ausgelöst wird. Dagegen wird dazu im zweiten Fall eine nicht-inertiale Kraft benötigt.

2.2.2 Die kinematische Bedeutung des Tensors \mathbf{O}

Wir haben gesehen, daß der Tensor \mathbf{O} Bestandteil der Bewegungsgleichung ist und wollen nun auf seine Bedeutung eingehen. Dazu betrachten wir die Änderung der Lage eines Massenpunktes in einem kartesischen Koordinatensystem. Zu Beginn sei seine Lage durch den Ortsvektor

$$\mathbf{r} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3 = x^k\mathbf{e}_k, \quad (2.8)$$

beschrieben.

Nach einer Bewegung entlang einer Kreisbahn um \mathbf{e}_3 besitzt der Massenpunkt den Ortsvektor

$${}^*\mathbf{r} = {}^*x^1 \mathbf{e}_1 + {}^*x^2 \mathbf{e}_2 + {}^*x^3 \mathbf{e}_3 = {}^*x^k \mathbf{e}_k \quad \text{mit} \quad |{}^*\mathbf{r}|^2 = |\mathbf{r}|^2, \quad {}^*x^3 = x^3. \quad (2.9)$$

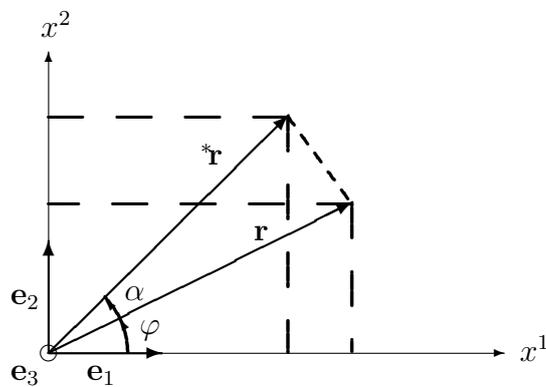


Abb. 2.3 Lageänderung eines Massenpunktes

Die lineare Abbildung $\mathbf{r} \longrightarrow {}^*\mathbf{r} = \mathbf{O}\mathbf{r}$ wird durch den Tensor 2. Stufe

$$\mathbf{O} = O^{ml} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_l, \quad (2.10)$$

definiert.

Im folgenden zeigen wir einige Eigenschaften von \mathbf{O} , die wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit benutzen.

1.) \mathbf{O} ist orthogonal.

Mit ${}^*\mathbf{r} = \mathbf{O}\mathbf{r}$ gilt

$$\begin{aligned}
{}^*\mathbf{r} \cdot {}^*\mathbf{r} &= (\mathbf{O}\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{O}\mathbf{r}) \\
&= (\mathbf{O}\mathbf{r}) \cdot \mathbf{O}(\mathbf{r}) \\
&= \mathbf{r} \cdot \mathbf{O}^T(\mathbf{O}\mathbf{r}) \\
&= \mathbf{r} \cdot (\mathbf{O}^T\mathbf{O})\mathbf{r} .
\end{aligned}
\tag{2.11}$$

Aus $|{}^*\mathbf{r}|^2 = |\mathbf{r}|^2$ folgt mit der Definition des Skalarproduktes

$${}^*\mathbf{r} \cdot {}^*\mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} , \tag{2.12}$$

d.h. $\mathbf{O}^T\mathbf{O} = \mathbf{1}$. Dies bedeutet, daß die Transponierte von \mathbf{O} gleich der Inversen von \mathbf{O} ist.

$$\boxed{\mathbf{O}^T = \mathbf{O}^{-1}} . \tag{2.13}$$

Damit ist \mathbf{O} orthogonal.

2.) $\det \mathbf{O} = \pm 1$.

Aus $\mathbf{O}^T = \mathbf{O}^{-1}$ folgt

$$\det \mathbf{O}^T = \det \mathbf{O}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{O}} . \tag{2.14}$$

Somit ist das Produkt

$$\det \mathbf{O}^T \cdot \det \mathbf{O} = 1 , \tag{2.15}$$

und damit

$$\boxed{\det \mathbf{O} = \pm 1 .} \quad (2.16)$$

3.) Komponentendarstellung von \mathbf{O} .

Setzen wir die Komponenten von \mathbf{r} und ${}^*\mathbf{r}$ in die Beziehung

$$\mathbf{O} = O^{ml} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_l , \quad (2.17)$$

ein, so ergibt sich daraus

$${}^*x^k \mathbf{e}_k = \mathbf{O}(x^l \mathbf{e}_l) = x^l \mathbf{O} \mathbf{e}_l . \quad (2.18)$$

Wir können jeweils die zugehörige Komponente von ${}^*\mathbf{r}$ isolieren, indem wir auf beiden Seiten das Skalarprodukt mit einem Basisvektor \mathbf{e}_m bilden.

$$\begin{aligned} {}^*x^k \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_k &= x^l (\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{O} \mathbf{e}_l) \\ {}^*x^m &= x^l (\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{O} \mathbf{e}_l) \\ &= x^l (\mathbf{e}_m \cdot (O^{pq} \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q) \mathbf{e}_l) \\ &= O^{ml} x^l . \end{aligned} \quad (2.19)$$

Bei Drehung um \mathbf{e}_3 gilt

$$x^3 = {}^*x^3 . \quad (2.20)$$

Daraus folgt mit

$${}^*x^3 = O^{31} x_1 + O^{32} x_2 + O^{33} x_3 \quad (2.21)$$

$$\implies O^{31} = 0, \quad O^{32} = 0, \quad O^{33} = 1. \quad (2.22)$$

Wegen der Orthogonalität von \mathbf{O} gilt

$$\mathbf{O}\mathbf{O}^T = \mathbf{1}, \quad (2.23)$$

also ergibt sich nach Einsetzen der uns bekannten Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} O^{11} & O^{12} & O^{13} \\ O^{21} & O^{22} & O^{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O^{11} & O^{21} & 0 \\ O^{12} & O^{22} & 0 \\ O^{13} & O^{23} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Hieraus können wir bestimmen

$$O^{11} \cdot 0 + O^{12} \cdot 0 + O^{13} \cdot 1 = 0 \implies O^{13} = 0, \quad (2.25)$$

und

$$O^{21} \cdot 0 + O^{22} \cdot 0 + O^{23} \cdot 1 = 0 \implies O^{23} = 0. \quad (2.26)$$

Weiterhin kann man mit $|\mathbf{r}| = r$ aus Abb. 2.3 ablesen

$$\begin{aligned} x^1 &= r \cos \varphi, & x^2 &= r \sin \varphi, \\ {}^*x^1 &= r \cos(\alpha + \varphi), & {}^*x^2 &= r \sin(\alpha + \varphi). \end{aligned} \quad (2.27)$$

wobei mit φ der Winkel zwischen der Abszisse und \mathbf{r} und mit α der Winkel zwischen \mathbf{r} und $^*\mathbf{r}$ bezeichnet wird.

Diese Beziehungen setzen wir in (2.19) ein und erhalten

$$\begin{aligned} r \cos(\alpha + \varphi) &= O^{11}r \cos \varphi + O^{12}r \sin \varphi, \\ r \sin(\alpha + \varphi) &= O^{21}r \cos \varphi + O^{22}r \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Nach Kürzen von r und Anwendung von Additionstheoremen ergibt sich für alle Winkel φ

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi &= O^{11} \cos \varphi + O^{12} \sin \varphi, \\ \sin \alpha \cos \varphi + \sin \varphi \cos \alpha &= O^{21} \cos \varphi + O^{22} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Durch Koeffizientenvergleich bestimmt man

$$\begin{aligned} O^{11} &= \cos \alpha, & O^{12} &= -\sin \alpha, \\ O^{21} &= \sin \alpha, & O^{22} &= \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Wir erhalten O^{kl} in Matrixschreibweise

$$(O^{kl}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Daraus ergibt sich also \mathbf{O} in Komponentendarstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{O} &= \cos \alpha \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \sin \alpha \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \\ &+ \sin \alpha \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + \cos \alpha \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (2.32)$$

2.3 Die Bewegungsgleichung des Massenpunktes

2.3.1 Allgemeines

Hatten wir eben nur die Lageänderung eines Massenpunktes untersucht, so wollen wir jetzt die Bewegung eines Massenpunktes betrachten. Zur Vereinfachung und im Hinblick auf unser weiteres Ziel dieser Arbeit, Vorgänge in einer Zentrifuge kennenzulernen betrachten wir hier eine Kreisbewegung. Da eine Zentrifuge nämlich um eine Achse rotiert, bewegt sich jeder Punkt in ihr auf einer Kreisbahn.

Wir benutzen hier wieder den orthogonalen Tensor \mathbf{O} , um die Plazierung des materiellen Punktes festzulegen.

$${}^*\mathbf{r}(t) = \mathbf{O}(t)\mathbf{r}. \quad (2.33)$$

Da es sich hier um eine Bewegung handelt, ist \mathbf{O} jetzt abhängig von der Zeit t . Durch die zeitliche Ableitung des Plazierungsvektors ${}^*\mathbf{r}(t)$ kann leicht auch die Geschwindigkeit des Teilchens zu jedem Zeitpunkt t ermittelt werden

$${}^*\mathbf{v}(t) = \frac{d{}^*\mathbf{r}(t)}{dt}. \quad (2.34)$$

Die zweite Ableitung des Plazierungsvektors ${}^*\mathbf{r}(t)$ nach der Zeit liefert die Beschleunigung

$${}^*\mathbf{a}(t) = \frac{d^2{}^*\mathbf{r}(t)}{dt^2}. \quad (2.35)$$

Es stellt sich nun die Frage, welche Ursachen zur Bewegung des materiellen Punktes führen. Wenn uns die Eigenschaften – wie z.B. die Masse – und außerdem die Plazierung sowie die Anfangsgeschwindigkeit des Massenpunktes bekannt sind, so benötigen wir noch ein Bewegungsgesetz, das die Einwirkungen von außen, also

die Einwirkungen der Umgebung auf den materiellen Punkt, beschreibt. In seinen Axiomen löste NEWTON (1643 bis 1727) dieses Problem der klassischen Mechanik. Diese Axiome gelten für Inertialsysteme. Dies sind Bezugssysteme, in denen ohne äußere Einwirkung die Bewegung geradlinig ist und die Geschwindigkeit eines Körpers konstant bleibt. Es gibt unendlich viele Inertialsysteme, die alle die Eigenschaft besitzen, sich geradlinig und gleichförmig gegen den Fixsternhimmel zu bewegen. Newton erklärte, daß die Kraft \mathbf{F} diejenige Größe sei, die den Bewegungszustand des Körpers ändere. Diese Kraft \mathbf{F} ist für Körper mit konstanter Masse m proportional zur Beschleunigung \mathbf{a} , d.h. es gilt

$$m\mathbf{a}(t) = \mathbf{F} . \quad (2.36)$$

Wie schon erwähnt gibt es zwei Möglichkeiten, die Bewegung eines Massenpunktes zu beschreiben. Im ersten Fall betrachten wir ein festes Bezugssystem mit den Basisvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, in dem sich der Massenpunkt mit dem Anfangsortsvektor \mathbf{r} bewegt. Zum Zeitpunkt t hat das Teilchen die Plazierung

$${}^*\mathbf{r} = {}^*x^k \mathbf{e}_k \quad \text{mit} \quad {}^*x^k = O^{kl} x^l . \quad (2.37)$$

Dieselbe Bewegung kann man auch beschreiben, indem man den Plazierungsvektor \mathbf{r} des Punktes festhält und das Basissystem dreht. Das Koordinatensystem hat nach der Drehung die Basisvektoren ${}^*\mathbf{e}_1, {}^*\mathbf{e}_2, {}^*\mathbf{e}_3$ mit

$${}^*\mathbf{e}_k = \mathbf{O} \mathbf{e}_k . \quad (2.38)$$

Im neuen Basissystem kann man den Ortsvektor des Punktes schreiben als

$${}^*\mathbf{r} = {}^*x^{k*} \mathbf{e}_k \quad \text{mit} \quad {}^*x^k = x^k . \quad (2.39)$$

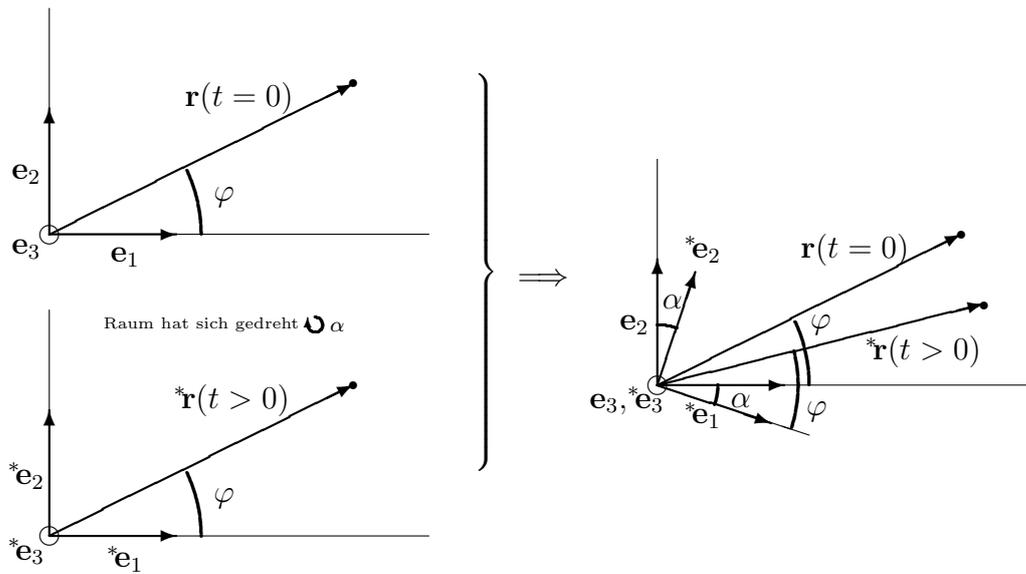


Abb. 2.4 Relativität von Bezugssystemen

Es ist nun leicht zu verstehen, daß man auch die Geschwindigkeit, die Beschleunigung und die Kräfte relativ zu diesem Bezugssystem ausdrücken kann. Im folgenden wollen wir Gleichungen für diese Größen aufstellen. Als zentrale Gleichung muß dabei immer das Newtonsche Grundgesetz $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ gelten, denn dessen Gültigkeit kann nicht von der Wahl des Beobachtersystems abhängig sein.

Zunächst betrachten wir die Bewegung eines Massenpunktes im inertialen Bezugssystem $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Aus (2.33) und (2.34) folgt für die Geschwindigkeit des Massenpunktes zu einer beliebigen Zeit t

$$\begin{aligned} {}^*\mathbf{v} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{O}\mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{O}}{dt}\mathbf{r} + \dot{\mathbf{O}}\mathbf{r} \quad \text{mit} \\ \dot{\mathbf{O}} &= \dot{O}^{kl}\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Aus (2.31) ergibt sich durch Ableitung nach der Zeit

$$(\dot{O}^{kl}) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} & -\cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} & 0 \\ \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} & -\sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin \alpha & -\cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d\alpha}{dt}. \quad (2.41)$$

Die zeitliche Winkeländerung $\frac{d\alpha}{dt}$ wird als Winkelgeschwindigkeit ω bezeichnet

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega. \quad (2.42)$$

Mit

$${}^*\mathbf{r} = \mathbf{O}\mathbf{r}, \quad (2.43)$$

folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{O}^{-1} {}^*\mathbf{r} \\ &= \mathbf{O}^T {}^*\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Damit läßt sich die Gleichung ${}^*\mathbf{v} = \dot{\mathbf{O}}\mathbf{r}$ schreiben als

$${}^*\mathbf{v} = \dot{\mathbf{O}}\mathbf{O}^T {}^*\mathbf{r}. \quad (2.45)$$

Wir definieren

$$\mathbf{W} := \dot{\mathbf{O}}\mathbf{O}^T = W^{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \quad (2.46)$$

dabei wird W^{kl} als Matrix der Winkelgeschwindigkeit bezeichnet.

Mit (2.31) und (2.41) ergibt sich

$$\begin{aligned}
(W^{kl}) &= \omega \begin{pmatrix} -\sin \alpha & -\cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \omega \begin{pmatrix} -\sin \alpha & -\cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \omega \begin{pmatrix} -\sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha & 0 \\ \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \omega \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.47}
\end{aligned}$$

In Komponentenschreibweise ergibt sich also

$$\mathbf{W} = -\omega \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \omega \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1. \tag{2.48}$$

Wir setzen dies in

$${}^* \mathbf{v} = \dot{\mathbf{O}} \mathbf{O}^T {}^* \mathbf{r} = \mathbf{W} {}^* \mathbf{r}, \tag{2.49}$$

ein und erhalten

$$\begin{aligned}
{}^* \mathbf{v} &= (-\omega \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \omega \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) {}^* \mathbf{r} \\
&= \omega (-\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) {}^* x^k \mathbf{e}_k \\
&= \omega \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^* x^1 \\ {}^* x^2 \\ 0 \end{pmatrix} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \omega \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos(\alpha + \varphi) \\ r \sin(\alpha + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \omega r \begin{pmatrix} -\sin(\alpha + \varphi) \\ \cos(\alpha + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \omega r (-\sin(\alpha + \varphi)\mathbf{e}_1 + \cos(\alpha + \varphi)\mathbf{e}_2) .
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Bildet man den Betrag dieses Geschwindigkeitsvektors, so erhält man die bekannte Gleichung für die Bahngeschwindigkeit

$$|\mathbf{v}^*| = \omega r . \tag{2.51}$$

Folgendes Bild soll dies noch einmal veranschaulichen.

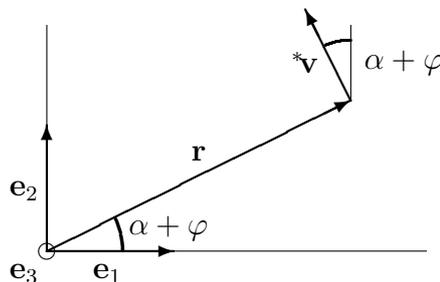


Abb. 2.5 Bahngeschwindigkeit eines Massenpunktes

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden wir noch eine besondere Eigenschaft von \mathbf{W} benutzen. Wir zeigen hier, daß \mathbf{W} schief-symmetrisch ist.

Es ist bekannt, daß

$$\mathbf{O}\mathbf{O}^T = 1. \tag{2.52}$$

Die Ableitung einer Konstante ist gleich Null, d.h.

$$(\mathbf{O}\mathbf{O}^T) \cdot = (\dot{\mathbf{O}}\mathbf{O}^T + \mathbf{O}\dot{\mathbf{O}}^T) = 0. \tag{2.53}$$

Mit $\dot{\mathbf{O}}\mathbf{O}^T = \mathbf{W}$ und $\mathbf{O}\dot{\mathbf{O}}^T = (\dot{\mathbf{O}}\mathbf{O}^T)^T = \mathbf{W}^T$ ist also

$$\mathbf{W} + \mathbf{W}^T = 0 \quad (2.54)$$

$$\implies \boxed{\mathbf{W} = -\mathbf{W}^T} \quad (2.55)$$

Damit ist \mathbf{W} schiefssymmetrisch.

2.3.2 Bewegungsgleichungen im nicht-inertialen Bezugssystem

Jetzt kommen wir zu einer Änderung des Bezugssystems. Wir wollen herausfinden, wie wir die Bewegungsgleichungen transformieren müssen, um die Bewegung im nicht-inertialen Bezugssystem zu beschreiben.

Im inertialen Bezugssystem wird die Platzierung eines materiellen Punktes durch den Ortsvektor $\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_m(t)$ ausgedrückt. Der Punkt hat die Koordinaten $\mathbf{x} = x^k \mathbf{e}_k$. Derselbe Ort des Punktes wird jetzt im nicht-inertialen Bezugssystem beschrieben. Dann hat der Punkt die Koordinaten

$${}^*\mathbf{x} = \mathbf{O}\mathbf{x} + \mathbf{d} \quad (2.56)$$

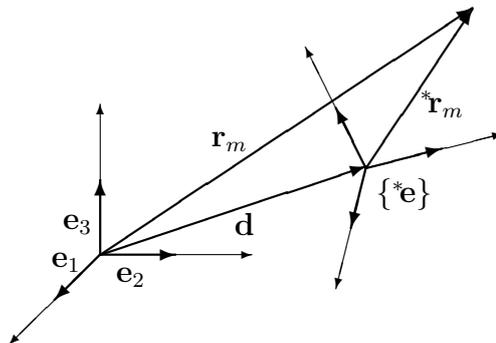


Abb. 2.6 Änderung des Bezugssystems

Dabei gibt der Vektor \mathbf{d} die Lage des alten Koordinatenursprungs im neuen System zur Zeit t an, also die Verschiebung des nicht-inertialen Bezugssystems zum inertialen System. \mathbf{O} beschreibt die gegenseitige Verdrehung der Koordinatensysteme zum Zeitpunkt t . \mathbf{O} und \mathbf{d} sind also zeitabhängige Größen. Genauso kann man die Beziehung zwischen den Ortsvektoren im inertialen und nicht-inertialen Bezugssystem \mathbf{r}_m und ${}^*\mathbf{r}_m$ aufstellen.

$${}^*\mathbf{r}_m = \mathbf{O}\mathbf{r}_m + \mathbf{d} . \quad (2.57)$$

Damit können wir die Geschwindigkeit im nicht-inertialen Bezugssystem bestimmen

$$\begin{aligned} {}^*\mathbf{v}_m &= \dot{{}^*\mathbf{r}}_m = \mathbf{O}\dot{\mathbf{r}}_m + \dot{\mathbf{O}}\mathbf{r}_m + \dot{\mathbf{d}} = \\ &= \mathbf{O}\mathbf{v}_m + \dot{\mathbf{O}}\mathbf{O}^T({}^*\mathbf{r}_m - \mathbf{d}) + \dot{\mathbf{d}} \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{O}\mathbf{v}_m = {}^*\mathbf{v}_m - \mathbf{W}({}^*\mathbf{r}_m - \mathbf{d}) - \dot{\mathbf{d}} .}$$

Wir bilden noch einmal die zeitliche Ableitung und erhalten die Beschleunigung

$$\begin{aligned} {}^*\mathbf{a}_m &= \dot{{}^*\mathbf{v}}_m = \mathbf{O}\mathbf{a}_m + \dot{\mathbf{O}}\mathbf{v}_m + \dot{\mathbf{O}}\mathbf{v}_m + \ddot{\mathbf{O}}\mathbf{r}_m + \ddot{\mathbf{d}} = \\ &= \mathbf{O}\mathbf{a}_m + 2\dot{\mathbf{O}}\mathbf{v}_m + \ddot{\mathbf{O}}\mathbf{r}_m + \ddot{\mathbf{d}} . \end{aligned} \quad (2.59)$$

Formt man diese Gleichung um, so erhält man

$$\mathbf{O}\mathbf{a}_m = {}^*\mathbf{a}_m - 2\dot{\mathbf{O}}\mathbf{v}_m - \ddot{\mathbf{O}}\mathbf{r}_m - \ddot{\mathbf{d}} . \quad (2.60)$$

Wir bringen diese Gleichung in eine andere Form, indem wir die beiden mittleren Terme mit $\mathbf{O}^T\mathbf{O} = 1$ multiplizieren. Es ergibt sich

$$\mathbf{O}\mathbf{a}_m = {}^*\mathbf{a}_m - 2\dot{\mathbf{O}}\mathbf{O}^T\mathbf{O}\mathbf{v}_m - \ddot{\mathbf{O}}\mathbf{O}^T\mathbf{O}\mathbf{r}_m - \ddot{\mathbf{d}} , \quad (2.61)$$

mit $\mathbf{W} = \dot{\mathbf{O}}\mathbf{O}^T$, (2.57) und (2.58) kann man dafür schreiben

$$\begin{aligned} \mathbf{O}\mathbf{a}_m = & \quad {}^*\mathbf{a}_m - 2\mathbf{W}({}^*\mathbf{v}_m - \mathbf{W}({}^*\mathbf{r}_m - \mathbf{d}) - \dot{\mathbf{d}}) \\ & - \ddot{\mathbf{O}}\mathbf{O}^T({}^*\mathbf{r}_m - \mathbf{d}) - \ddot{\mathbf{d}}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Auch die letzten Ausdrücke mit dem orthogonalen Tensor auf der rechten Seite kann man durch Ausdrücke mit \mathbf{W} ersetzen. Wir benutzen

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{W}} &= \ddot{\mathbf{O}}\mathbf{O}^T + \dot{\mathbf{O}}\dot{\mathbf{O}}^T = \\ &= \ddot{\mathbf{O}}\mathbf{O}^T + \dot{\mathbf{O}}^T\mathbf{O}\dot{\mathbf{O}}^T = \ddot{\mathbf{O}}\mathbf{O}^T - \mathbf{W}^2 \\ \implies \ddot{\mathbf{O}}\mathbf{O}^T &= \dot{\mathbf{W}} + \mathbf{W}^2. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Es ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \mathbf{O}\mathbf{a}_m = & \quad {}^*\mathbf{a}_m - 2\mathbf{W}({}^*\mathbf{v}_m - \dot{\mathbf{d}}) + 2\mathbf{W}^2({}^*\mathbf{r}_m - \mathbf{d}) \\ & - (\dot{\mathbf{W}} + \mathbf{W}^2)({}^*\mathbf{r}_m - \mathbf{d}) - \ddot{\mathbf{d}}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Wir fassen noch einmal zusammen und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{O}\mathbf{a}_m = & \quad {}^*\mathbf{a}_m - 2\mathbf{W}({}^*\mathbf{v}_m - \dot{\mathbf{d}}) + \mathbf{W}^2({}^*\mathbf{r}_m - \mathbf{d}) \\ & - \dot{\mathbf{W}}({}^*\mathbf{r}_m - \mathbf{d}) - \ddot{\mathbf{d}}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Die Terme dieser Gleichung werden wie folgt bezeichnet:

$$\begin{aligned} 2\mathbf{W}({}^*\mathbf{v}_m - \dot{\mathbf{d}}) & \quad - \text{Coriolisbeschleunigung} \\ -\mathbf{W}^2({}^*\mathbf{r}_m - \mathbf{d}) & \quad - \text{Zentrifugalbeschleunigung} \\ \dot{\mathbf{W}}({}^*\mathbf{r}_m - \mathbf{d}) & \quad - \text{Eulerbeschleunigung} \\ \ddot{\mathbf{d}} & \quad - \text{Beschleunigung der relativen Translation} \end{aligned}$$

Wir wollen jetzt noch untersuchen welchen Einfluß die Änderung des Bezugssystems auf die im System wirkenden Kräfte hat. Wir benutzen dabei die Invarianz des Newtonschen Grundgesetzes für verschiedene Beobachtersysteme. D.h. es muß sowohl gelten

$$m\mathbf{a} - \mathbf{F} = 0, \quad (2.66)$$

als auch

$$m^*\mathbf{a} - {}^*\mathbf{F} = 0. \quad (2.67)$$

Mit dieser zentralen Aussage sind wir in der Lage, eine Transformationsregel für Kräfte beim Übergang von einem inertialen zu einem nicht inertialen Bezugssystem aufzustellen.

Aus

$$m\mathbf{a} - \mathbf{F} = 0, \quad (2.68)$$

folgt durch Multiplikation mit dem orthogonalen Tensor

$$m\mathbf{O}\mathbf{a} - \mathbf{O}\mathbf{F} = 0. \quad (2.69)$$

Durch Einsetzen von (2.65) ergibt sich

$$\begin{aligned} m^*\mathbf{a}_m - 2m\mathbf{W}({}^*\mathbf{v}_m - \dot{\mathbf{d}}) + m\mathbf{W}^2({}^*\mathbf{r}_m - \mathbf{d}) \\ - m(\dot{\mathbf{W}}({}^*\mathbf{r}_m - \mathbf{d}) - m\ddot{\mathbf{d}} - \mathbf{O}\mathbf{F}) = 0. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Und daraus

$$\begin{aligned} \mathbf{O}\mathbf{F} = {}^*\mathbf{F} - 2m\mathbf{W}({}^*\mathbf{v}_m - \dot{\mathbf{d}}) + m\mathbf{W}^2({}^*\mathbf{r}_m - \mathbf{d}) \\ - m\dot{\mathbf{W}}({}^*\mathbf{r}_m - \mathbf{d}) - m\ddot{\mathbf{d}}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Man sieht, daß hier zusätzliche Kräfte wirken. Es sind Trägheitskräfte, die wieder verschwinden, wenn wir das Teilchen von einem Inertialsystem aus betrachten.

Mit $m \mathbf{a} = \mathbf{F}$ und (2.59) entsteht nämlich

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= m(\mathbf{Oa} + 2\dot{\mathbf{Ov}} + \ddot{\mathbf{Or}} + \ddot{\mathbf{d}}) \\ &= \mathbf{OF} + 2m\dot{\mathbf{Ov}} + m\ddot{\mathbf{Or}} + m\ddot{\mathbf{d}}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Ein **Beispiel** mit den vereinfachenden Annahmen $\mathbf{d} = 0$ und $\mathbf{F} = 0$ soll uns noch einmal die Wirkungsrichtung der Kräfte im nicht-inertialen Bezugssystem verdeutlichen. Wir betrachten den zweidimensionalen Raum und rechnen in Zylinderkoordinaten, weil sich dies auch für das Berechnen der Vorgänge in der Zentrifuge als zweckmäßig erweisen wird.

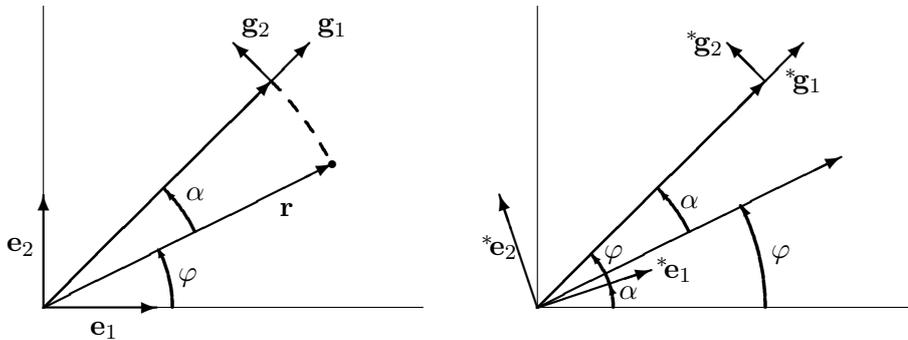


Abb. 2.7 Zylinderkoordinaten

Ebenfalls soll hier gelten

$$\begin{aligned} \omega &= \text{konst und} \\ r &= |\mathbf{r}_m| = \text{konst}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Der Massenpunkt hat zum Zeitpunkt $t = 0$ die Koordinaten

$$\begin{aligned} x^1 &= r \cos \varphi, \\ x^2 &= r \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.74)$$

D.h. sein Plazierungsvektor hat die Form

$$\mathbf{r}_m = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2. \quad (2.75)$$

Wir bestimmen die Basis in Zylinderkoordinaten

$$\begin{cases} {}^*\mathbf{g}_1 = \frac{\partial {}^*\mathbf{r}_m}{\partial r} = \cos \varphi {}^*\mathbf{e}_1 + \sin \varphi {}^*\mathbf{e}_2, \\ {}^*\mathbf{g}_2 = \frac{\partial {}^*\mathbf{r}_m}{\partial \varphi} = r(-\sin \varphi {}^*\mathbf{e}_1 + \cos \varphi {}^*\mathbf{e}_2). \end{cases} \quad (2.76)$$

Damit kann man die Basisvektoren im inertialen Bezugssystem mittels Skalarmultiplikation umformen zu

$$\begin{cases} {}^*\mathbf{e}_1 = \cos \varphi {}^*\mathbf{g}_1 - \frac{1}{r} \sin \varphi {}^*\mathbf{g}_2, \\ {}^*\mathbf{e}_2 = \sin \varphi {}^*\mathbf{g}_1 + \frac{1}{r} \cos \varphi {}^*\mathbf{g}_2. \end{cases} \quad (2.77)$$

${}^*\mathbf{g}_1$ ist ein Einheitsvektor, die Länge von ${}^*\mathbf{g}_2$ ist abhängig von r .

Der Plazierungsvektor des Massenpunktes lautet damit

$$\begin{aligned} {}^*\mathbf{r}_m &= r \cos \varphi \left(\cos \varphi {}^*\mathbf{g}_1 - \frac{1}{r} \sin \varphi {}^*\mathbf{g}_2 \right) \\ &\quad + r \sin \varphi \left(\sin \varphi {}^*\mathbf{g}_1 + \frac{1}{r} \cos \varphi {}^*\mathbf{g}_2 \right) \\ &= r \cos^2 \varphi {}^*\mathbf{g}_1 - \cos \sin \varphi {}^*\mathbf{g}_2 \\ &\quad + r \sin^2 \varphi {}^*\mathbf{g}_1 + \sin \cos \varphi {}^*\mathbf{g}_2 \\ &= r {}^*\mathbf{g}_1. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Da sich das Basissystem mitdreht, ist die Geschwindigkeit des Massenpunktes im nicht-inertialen Bezugssystem

$${}^*\mathbf{v}_m = 0. \quad (2.79)$$

Uns ist jetzt bekannt

$${}^*\mathbf{v}_m = \mathbf{O}\mathbf{v} + \dot{\mathbf{O}}\mathbf{r} = 0, \quad (2.80)$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{O}\mathbf{v} &= -\dot{\mathbf{O}}\mathbf{r} \\ \implies \mathbf{v} &= -\mathbf{O}^T \dot{\mathbf{O}}\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Durch Umformen von (2.31) und mit (2.41) können wir schreiben

$$\begin{aligned}
(\mathbf{O}^T \dot{\mathbf{O}}) &= \omega \begin{pmatrix} -\cos \alpha & -\sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & -\sin \alpha \end{pmatrix} \\
&= \omega \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{W}.
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Daraus folgt für die Geschwindigkeit des Massenpunktes

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \mathbf{W}\mathbf{r} \\
&= -\omega(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)\mathbf{r} \\
&= (-\omega\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \omega\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)\mathbf{r} \\
&= (-\omega x_2 \mathbf{e}_1 + \omega x_1 \mathbf{e}_2) \\
&= \omega r(-\sin(\varphi + \alpha)\mathbf{e}_1 + \cos(\alpha + \varphi)\mathbf{e}_2) \\
&= \omega \mathbf{g}_2.
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Benutzen wir die Beziehung ${}^*\mathbf{a} = {}^*\dot{\mathbf{v}} = 0 = \mathbf{O}\mathbf{a}_m + 2\dot{\mathbf{O}}\mathbf{v}_m + \ddot{\mathbf{O}}\mathbf{r}_m + \ddot{\mathbf{d}}$, ergibt sich mit (2.63) und $\ddot{\mathbf{d}} = 0$

$$\begin{aligned}
\mathbf{O}\mathbf{a} &= -2\dot{\mathbf{O}}\mathbf{v} - \ddot{\mathbf{O}}\mathbf{r} \\
&= \mathbf{W}^2{}^*\mathbf{r} - \dot{\mathbf{W}}{}^*\mathbf{r}.
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Da die Winkelgeschwindigkeit ω konstant ist, gilt $\dot{\mathbf{W}} = 0$ und damit

$$\mathbf{O}\mathbf{a} = \mathbf{W}^2{}^*\mathbf{r}. \tag{2.85}$$

Als einziger Term bleibt also die Zentrifugalbeschleunigung stehen. Wir transformieren nun \mathbf{W} in Polarkoordinaten. Aus (2.83) geht hervor, daß

$$\mathbf{W} = -\omega(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1). \tag{2.86}$$

Setzen wir hier die Beziehung (2.77) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbf{W} &= -\omega \left\{ \left(\cos \varphi^* \mathbf{g}_1 - \frac{1}{r} \sin \varphi^* \mathbf{g}_2 \right) \otimes \left(\sin \varphi^* \mathbf{g}_1 + \frac{1}{r} \cos \varphi^* \mathbf{g}_2 \right) - \right. \\
&\quad \left. - \left(\sin \varphi^* \mathbf{g}_1 + \frac{1}{r} \cos \varphi^* \mathbf{g}_2 \right) \otimes \left(\cos \varphi^* \mathbf{g}_1 - \frac{1}{r} \sin \varphi^* \mathbf{g}_2 \right) \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\omega \left\{ \frac{1}{r} \cos^2 \varphi \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_2 - \frac{1}{r} \sin^2 \varphi \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_1 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{r} \sin^2 \varphi \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_2 - \frac{1}{r} \cos^2 \varphi \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_1 \right\} \\
&= -\omega \left\{ \frac{1}{r} \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_2 - \frac{1}{r} \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_1 \right\} \\
&= -\omega \frac{1}{r} \{ \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_1 \} .
\end{aligned} \tag{2.87}$$

Wie (2.85) zeigt, benötigen wir das Quadrat des Winkelgeschwindigkeitstensors und deshalb bilden wir

$$\mathbf{W}^2 = \omega^2 \frac{1}{r^2} \{ \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_1 \} \{ \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_1 \} . \tag{2.88}$$

Unter Beachtung von $\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_2 = r \cdot r = r^2$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}^2 &= \omega^2 \frac{1}{r^2} \left\{ -r^2 \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_2 \right\} \\
&= -\omega^2 \left\{ \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 + \frac{1}{r^2} \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_2 \right\} .
\end{aligned} \tag{2.89}$$

Wir können dann bestimmen

$$\begin{aligned}
\mathbf{OF} &= m\mathbf{Oa} \\
&= -m\omega^2 \left\{ \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 + \frac{1}{r^2} \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_2 \right\} r \mathbf{g}_1 \\
&= -m\omega^2 r \mathbf{g}_1 .
\end{aligned} \tag{2.90}$$

Man sieht jetzt, daß diese Kraft, die Zentrifugalkraft, in Richtung \mathbf{g}_1 , also radial zur Kreisbahn, auf der sich das Teilchen bewegt, wirkt.

2.3.3 Ergebnisse für den Massenpunkt

Wir fassen jetzt die Ergebnisse für die Kreisbewegung eines Massenpunktes als Übersicht zusammen. Dabei befindet sich der (\bullet)-Beobachter im inertialen Bezugssystem und möchte mit den in seinem System gemessenen Größen die entsprechenden ($*$)-Größen im nicht-inertialen Bezugssystem bestimmen.

	(•)-Beobachter	(*)-Beobachter
Masse	m	m
Plazierung	${}^*\mathbf{r} = \mathbf{O}\mathbf{r} + \mathbf{d}$	$\mathbf{r} = \mathbf{O}^T({}^*\mathbf{r} - \mathbf{d})$
Geschwindigkeit	${}^*\mathbf{v}_m = \mathbf{O}\mathbf{v} + \dot{\mathbf{O}}\mathbf{r} + \dot{\mathbf{d}}$	$\mathbf{v} = \mathbf{O}^T({}^*\mathbf{v} - \mathbf{W}({}^*\mathbf{r} - \mathbf{d}) - \dot{\mathbf{d}})$
Beschleunigung	${}^*\mathbf{a} = \mathbf{O}\mathbf{a} + 2\dot{\mathbf{O}}\mathbf{v} + \ddot{\mathbf{O}}\mathbf{r} + \ddot{\mathbf{d}}$	$\mathbf{a} = \mathbf{O}^T [{}^*\mathbf{a} - 2\mathbf{W}({}^*\mathbf{v} - \dot{\mathbf{d}}) +$ $+ \mathbf{W}^2({}^*\mathbf{r} - \mathbf{d}) - \dot{\mathbf{W}}({}^*\mathbf{r} - \mathbf{d}) - \ddot{\mathbf{d}}]$
Bewegung	$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$	$m{}^*\mathbf{a} = {}^*\mathbf{F}$
Kraft	${}^*\mathbf{F} = \mathbf{O}\mathbf{F} + 2m\dot{\mathbf{O}}\mathbf{v} +$ $+ m\ddot{\mathbf{O}}\mathbf{r} + m\ddot{\mathbf{d}}$	$\mathbf{F} = \mathbf{O}^T [{}^*\mathbf{F} - 2m\mathbf{W}({}^*\mathbf{v} - \dot{\mathbf{d}}) +$ $+ m\mathbf{W}^2({}^*\mathbf{r} - \mathbf{d}) - m\dot{\mathbf{W}}({}^*\mathbf{r} - \mathbf{d}) - m\ddot{\mathbf{d}}]$

Alle diese Transformationsgesetze basieren auf der

<p>Euler Transformation</p> <p>$\mathbf{O} = \mathbf{O}(t)$, $\mathbf{d} = \mathbf{d}(t)$</p> <p>${}^*\mathbf{r} = \mathbf{O}\mathbf{r} + \mathbf{d}$.</p>
--

Dies ist die allgemeinste Transformation zwischen kartesischen Koordinatensystemen, wenn die Zeit nicht transformiert wird. Dabei sind \mathbf{O} und \mathbf{d} von der Zeit abhängig. Diese Zeitabhängigkeit bewirkt bei den Bewegungsgrößen Terme, die es nicht zulassen, sie wie übliche Vektoren und Tensoren zu transformieren. Das ist nur dann möglich, wenn die zusätzlichen Terme wegfallen, also wenn \mathbf{O} und \mathbf{d} nicht zeitabhängig sind. In diesem Fall bezeichnet man eine Transformation als

<p>Galilei Transformation</p> <p>\mathbf{O}, \mathbf{d} konstant.</p>

2.4 Kontinuum

In der Zentrifuge können wir nun nicht nur einzelne Massenpunkte betrachten. Denn das Wasser, das durch die Zentrifuge gedrückt wird, stellt ein **Kontinuum** dar. D.h., daß sich egal wie klein man eine Umgebung auch betrachtet, immer unendlich viele Teilchen in ihr befinden. Für ein Kontinuum ändern sich die Transformationsregeln des Massenpunktes nicht, jedoch gilt hier eine andere Bewegungsgleichung.

2.4.1 Cauchy'scher Erhaltungssatz der Bewegungsgröße im inertialen Bezugssystem

Wir untersuchen ein Teilchen \mathbf{X} , das sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in einer spannungsfreien Referenzkonfiguration befindet. Dieses Teilchen bewegt sich um den Verschiebungsvektor \mathbf{u} . Es befindet sich dann in einer neuen Konfiguration und hat den Ortsvektor \mathbf{x} .

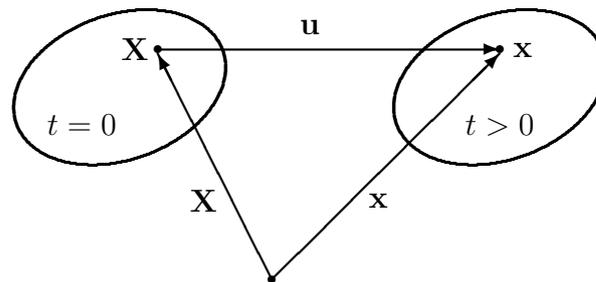


Abb. 2.8 Kontinuum

Man kann die Bewegung mit der Bewegungsfunktion χ ausdrücken

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \stackrel{*}{=} \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t). \quad (2.91)$$

Dann gilt für die Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad (2.92)$$

und entsprechend für die Beschleunigung

$$\mathbf{a} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (2.93)$$

Der wesentliche Unterschied zur Bewegung des Massenpunktes stellt nun die Bewegungsgleichung dar. Für das Kontinuum gilt nicht die Newtonsche Gleichung, sondern der Erhaltungssatz der Bewegungsgröße von CAUCHY

$$\rho \mathbf{a} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} . \quad (2.94)$$

Hierbei handelt es sich genau wie bei der Newtonschen Gleichung um einen Impulserhaltungssatz. Dabei steht ρ für die Massendichte, $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$ ist der Cauchysche Spannungstensor und \mathbf{b} ist eine Außenkraft.

2.4.2 Transformation in ein nicht-inertiales Bezugssystem

Uns interessiert nun, wie die Cauchysche Gleichung aussieht, wenn wir das Bezugssystem ändern. Unter der Annahme, daß die Massendichte im beweglichen und im unbeweglichen System gleich ist, gelten die unveränderten Transformationsregeln

$$\begin{aligned} {}^* \mathbf{r} &= \mathbf{O} \mathbf{r} + \mathbf{d} \quad \text{bzw.} \quad {}^* \mathbf{x} = \mathbf{O} \mathbf{x} + \mathbf{d} , \\ {}^* \mathbf{v} &= \mathbf{O} \mathbf{v} + \dot{\mathbf{O}} \mathbf{x} + \dot{\mathbf{d}} , \quad \text{und} \\ {}^* \mathbf{a} &= \mathbf{O} \mathbf{a} + \dot{\mathbf{O}} \mathbf{v} + \ddot{\mathbf{O}} \mathbf{x} + \ddot{\mathbf{d}} , \\ \text{mit } {}^* \rho &= \rho , \quad \mathbf{O}(t) \text{ und } \mathbf{d}(t) . \end{aligned} \quad (2.95)$$

Die Bewegungsgleichung lautet im beweglichen System

$${}^* \rho {}^* \mathbf{a} = \operatorname{div} {}^* \mathbf{T} + {}^* \rho {}^* \mathbf{b} , \quad (2.96)$$

wobei $\operatorname{div} {}^*$ bedeutet, daß nach ${}^* x$ und nicht nach x differenziert wird.

2.4.3 Das Spannungsglied $\operatorname{div} \mathbf{T}$

Es stellt sich nun die Frage, wie man $\operatorname{div} {}^* \mathbf{T}$ transformieren kann. Wir wollen zunächst die Spannung transformieren. Dazu schreiben wir den Spannungstensor in Komponentenschreibweise

$$\mathbf{T} = T^{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l . \quad (2.97)$$

Mit ${}^*\mathbf{e}_k = \mathbf{O}\mathbf{e}_k$ folgt daraus

$$\begin{aligned}
 {}^*\mathbf{T} &= T^{kl}(\mathbf{O}\mathbf{e}_k) \otimes (\mathbf{O}\mathbf{e}_l) = \\
 &= \mathbf{O}(T^{kl}\mathbf{e}_k) \otimes \mathbf{O}\mathbf{e}_l = \\
 &= \mathbf{O} \underbrace{(T^{kl}\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)}_{\mathbf{T}} \mathbf{O}^T \\
 \implies & \boxed{{}^*\mathbf{T} = \mathbf{O}\mathbf{T}\mathbf{O}^T}.
 \end{aligned} \tag{2.98}$$

Eine Größe, die sich derart transformieren läßt, wird eine *objektive Größe* genannt. Jetzt geht es darum, $\operatorname{div} {}^*\mathbf{T}$ zu transformieren. Dazu schreiben wir $\operatorname{div} \mathbf{T}$ in Koordinaten

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{T} &= (\operatorname{grad} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{1} = \\
 &= \left(\frac{\partial((T^{kl}\mathbf{e}_k) \otimes \mathbf{O}\mathbf{e}_l)}{\partial x^m} \otimes \mathbf{e}_m \right) \cdot \mathbf{1} \equiv \\
 &= \frac{\partial T^{km}}{\partial x^m} \mathbf{e}_k.
 \end{aligned} \tag{2.99}$$

Im beweglichen Koordinatensystem gilt also

$$\operatorname{div} {}^*\mathbf{T} = \frac{\partial {}^*T^{km}}{\partial {}^*x^m} {}^*\mathbf{e}_k. \tag{2.100}$$

Wie man nach ${}^*x^m$ differenziert wollen wir zur Vereinfachung zunächst an einer skalaren Funktion $\phi(\mathbf{x})$ herausfinden. Für diese Funktion ist uns bekannt

$$\begin{aligned}
 \operatorname{grad} \phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \mathbf{e}_k \quad \text{und} \\
 \mathbf{x} &= \mathbf{O}^T({}^*\mathbf{x} - \mathbf{d}).
 \end{aligned} \tag{2.101}$$

Wegen der Transponierung von \mathbf{O} müssen wir bei der Koordinatenbildung bezüglich des ersten Koeffizienten summieren und nicht bezüglich des zweiten, d.h. es gilt

$$x^k = O^{lk}({}^*x_l - d_l). \tag{2.102}$$

Wir führen eine zweite skalare Funktion ein

$$\phi(*\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}(*\mathbf{x})) . \quad (2.103)$$

Dann gilt unter Berücksichtigung der inneren Ableitung

$$\begin{aligned} \text{grad}^* \phi &= \frac{\partial \phi}{\partial *x^k} * \mathbf{e}_k = \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial *x^k} * \mathbf{e}_k . \end{aligned} \quad (2.104)$$

Mit $\frac{\partial}{\partial *x^k}(O^{ml}(*x_m - d_m)) = O^{ml}\delta_{km} = O^{kl}$ kann man dies noch vereinfachen zu

$$\begin{aligned} \text{grad}^* \phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x^l} O^{kl} * \mathbf{e}_k = (O^{kl} \frac{\partial \phi}{\partial x^l}) * \mathbf{e}_k \\ \implies \text{grad}^* \phi &= \mathbf{O}^T \text{grad} \phi . \end{aligned} \quad (2.105)$$

Wir wollen diese Beziehung nun auf den Spannungstensor anwenden. $\text{div} \mathbf{T}$ ist ein Vektor und da wir nicht nach der Zeit differenzieren, transformiert sich dieser Vektor auch dementsprechend. D.h.

$$\begin{aligned} \text{div}^* * \mathbf{T} &= (\text{grad}^* * \mathbf{T}) \cdot \mathbf{1} = \\ &= [(\mathbf{O}^T \text{grad}) * \mathbf{T}] \cdot \mathbf{1} = \\ &= [\mathbf{O}^T \text{grad}(\mathbf{O} \mathbf{T} \mathbf{O}^T)] \cdot \mathbf{1} = \\ &= [(\text{grad} \mathbf{T}) \mathbf{O}^T] \cdot \mathbf{1} = \\ &= \mathbf{O}(\text{div} \mathbf{T}) . \end{aligned} \quad (2.106)$$

Damit haben wir die Transformationsregel für einen objektiven Vektor erhalten:

$$\boxed{\text{div}^* * \mathbf{T} = \mathbf{O} \text{div} \mathbf{T}} . \quad (2.107)$$

Wir benutzen dies jetzt um die Cauchysche Gleichung zu transformieren.

$$\begin{aligned}
 {}^*\rho^*\mathbf{a} &= \operatorname{div}{}^*\mathbf{T} + {}^*\rho^*\mathbf{b} \\
 \rho(\mathbf{O}\mathbf{a} + 2\dot{\mathbf{O}}\mathbf{v} + \ddot{\mathbf{O}}\mathbf{x} + \ddot{\mathbf{d}}) &= \mathbf{O} \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho^*\mathbf{b} \\
 \mathbf{O} \underbrace{(\rho\mathbf{a} - \operatorname{div} \mathbf{T})}_{\rho\mathbf{b}} + \rho(2\dot{\mathbf{O}}\mathbf{v} + \ddot{\mathbf{O}}\mathbf{x} + \ddot{\mathbf{d}}) &= \rho^*\mathbf{b}.
 \end{aligned} \tag{2.108}$$

Wir erhalten so die Transformationsregel für das letzte uns unbekanntes Glied in der Gleichung, nämlich für ${}^*\mathbf{b}$

$$\mathbf{O}\mathbf{b} + 2\dot{\mathbf{O}}\mathbf{v} + \ddot{\mathbf{O}}\mathbf{x} + \ddot{\mathbf{d}} = {}^*\mathbf{b}. \tag{2.109}$$

2.4.4 Ergebnisse für das Kontinuum

Zum Vergleich wollen wir auch die Ergebnisse für das Kontinuum in einer Tabelle zusammenfassen:

	(•)-Beobachter	(*)-Beobachter
Massendichte	${}^*\rho = \rho$	ρ
Plazierung	${}^*\mathbf{x} = \mathbf{O}\mathbf{x} + \mathbf{d}$	$\mathbf{x} = \mathbf{O}^T({}^*\mathbf{x} - \mathbf{d})$
Geschwindigkeit	${}^*\mathbf{v} = \mathbf{O}\mathbf{v} + \dot{\mathbf{O}}\mathbf{x} + \dot{\mathbf{d}}$	$\mathbf{v} = \mathbf{O}^T({}^*\mathbf{v} - \mathbf{W}({}^*\mathbf{x} - \mathbf{d}) - \dot{\mathbf{d}})$
Beschleunigung	${}^*\mathbf{a} = \mathbf{O}\mathbf{a} + 2\dot{\mathbf{O}}\mathbf{v} + \ddot{\mathbf{O}}\mathbf{x} + \ddot{\mathbf{d}}$	$\mathbf{a} = \mathbf{O}^T[{}^*\mathbf{a} - 2\mathbf{W}({}^*\mathbf{v} - \dot{\mathbf{d}}) + \mathbf{W}^2({}^*\mathbf{x} - \mathbf{d}) - \dot{\mathbf{W}}({}^*\mathbf{x} - \mathbf{d}) - \ddot{\mathbf{d}}]$
Bewegung	$\rho\mathbf{a} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho\mathbf{b}$	$\rho^*\mathbf{a} = \operatorname{div}{}^*\mathbf{T} + \rho^*\mathbf{b}$
Spannung	${}^*\mathbf{T} = \mathbf{O}\mathbf{T}\mathbf{O}^T$	$\mathbf{T} = \mathbf{O}^T{}^*\mathbf{T}\mathbf{O}$
Kraftdichte	${}^*\mathbf{b} = \mathbf{O}\mathbf{b} + 2\dot{\mathbf{O}}\mathbf{v} + \ddot{\mathbf{O}}\mathbf{x} + \ddot{\mathbf{d}}$	$\mathbf{b} = \mathbf{O}^T[{}^*\mathbf{b} - 2\mathbf{W}({}^*\mathbf{v} - \dot{\mathbf{d}}) + (\mathbf{W}^2 - \dot{\mathbf{W}})({}^*\mathbf{x} - \mathbf{d}) - \ddot{\mathbf{d}}]$

Hierzu noch ein abschließendes **Beispiel**:

Wir betrachten die Drehung einer Kreisscheibe mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω . Wir setzen außerdem vereinfachend voraus:

$$\mathbf{d} \equiv 0, \quad {}^*\mathbf{a} \equiv 0, \quad \mathbf{b} = 0. \tag{2.110}$$

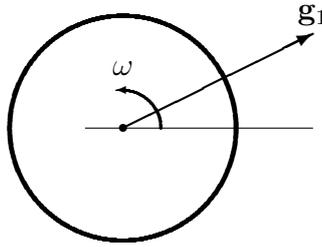


Abb. 2.9 Kreisscheibe

Damit können wir die Bewegungsgleichung im nicht-inertialen Bezugssystem vereinfachen

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\rho^* \mathbf{a}}_0 &= \operatorname{div}^* \mathbf{T} + \rho^* \mathbf{b} \\
 \Rightarrow 0 &= \operatorname{div}^* \mathbf{T} + \rho \left(\underbrace{\mathbf{O} \mathbf{b}}_0 + 2 \dot{\mathbf{O}} \mathbf{v} + \ddot{\mathbf{O}} \mathbf{x} + \underbrace{\ddot{\mathbf{d}}}_0 \right) \\
 0 &= \operatorname{div}^* \mathbf{T} + \rho (2 \dot{\mathbf{O}} \mathbf{O}^T \mathbf{O} \mathbf{v} + \ddot{\mathbf{O}} \mathbf{O}^T \mathbf{O} \mathbf{x}) \\
 0 &= \operatorname{div}^* \mathbf{T} + \rho (2 \mathbf{W} \mathbf{O} \mathbf{v} + (\underbrace{\dot{\mathbf{W}}}_0 + \mathbf{W}^2) \mathbf{O} \mathbf{x}) \\
 0 &= \operatorname{div}^* \mathbf{T} + \rho [2 \mathbf{W} (\underbrace{^* \mathbf{v}}_0 - \dot{\mathbf{O}} \mathbf{x} - \underbrace{\dot{\mathbf{d}}}_0) + \mathbf{W}^2 (^* \mathbf{x} - \underbrace{\mathbf{d}}_0)] \\
 0 &= \operatorname{div}^* \mathbf{T} + \rho [2 \mathbf{W} (-\mathbf{W} (^* \mathbf{x} - \underbrace{\mathbf{d}}_0)) + \mathbf{W}^2 ^* \mathbf{x}] \\
 0 &= \operatorname{div}^* \mathbf{T} - \rho \mathbf{W}^2 ^* \mathbf{x} \\
 0 &= \operatorname{div}^* \mathbf{T} + \rho \omega^2 r \mathbf{g}_1 .
 \end{aligned} \tag{2.111}$$

Wir sehen also, da auch hier die Zentrifugalkraft wirkt. Zusätzlich existiert beim Kontinuum aber die Spannung $\operatorname{div}^* \mathbf{T}$.

Kapitel 3

Grundlagen für zweikomponentige Körper

In Kapitel 4 dieser Arbeit wollen wir eine Zentrifuge betrachten. Sie besteht aus einem sich drehenden porösen Körper, durch den eine Flüssigkeit gedrückt wird. Offensichtlich handelt es sich hier um einen **zweikomponentigen porösen Körper**. Wir setzen dabei isotherme Bedingungen voraus, d.h. es sollen keine Temperaturänderungen eintreten. Sieht man sich einen Teil dieses zweikomponentigen Körpers durch eine Lupe - also mikroskopisch - an, dann sieht man das Festkörperskelett S und Kanäle F , durch die die Flüssigkeit gepresst wird (siehe Abb.).



Abb. 3.1 Mikroskopische Betrachtungsweise

Wir wollen hier davon ausgehen, daß alle Kanäle durchlässig sind. Es bilden sich also weder Säcke noch Einbuchtungen, in denen die Flüssigkeit zur Ruhe kommt. Wäre dies nämlich der Fall, so würde diese Flüssigkeit nicht mehr zur Bewegung

beitragen und müßte dem Skelett zugerechnet werden.

3.1 Mikroskopische und makroskopische Betrachtungsweise

Wir wollen nun die Frage klären, wie wir die Eigenschaften eines solchen Körpers beschreiben können. Ein einfaches **Beispiel** soll uns das Problem vor Augen führen:

Zwei gleiche Stäbe, die fest im Boden eingespannt sind und oben mit einer Kopfplatte verbunden sind, werden einem Zugversuch unterzogen.

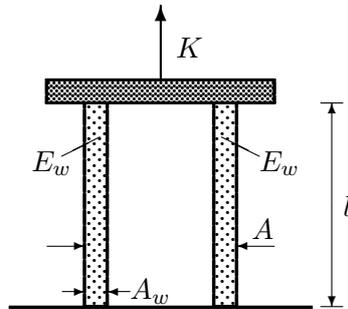


Abb. 3.2 Zugversuch

Sie haben beide den Elastizitätsmodul E_w und nach der Belastung mit der Kraft K die Querschnittsfläche A_w sowie die Länge l . Wir können dann mit $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ und $\sigma = \frac{K}{A}$ die Verzerrung ε_w des Gesamtkörpers angeben als

$$\varepsilon_w = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{K}{2E_w A_w}. \quad (3.1)$$

Dabei bezeichnet l_0 die Anfangslänge der Stäbe.

Stellen wir uns jetzt vor, daß die beiden Stäbe mit einer undurchsichtigen Folie umhüllt sind und wir die wirkliche Querschnittsfläche und den wirklichen Elastizitätsmodul eines einzelnen Stabes nicht kennen. Uns ist nur eine Gesamtquerschnittsfläche A sowie ein Gesamtelastizitätsmodul E_{eff} bekannt. Jetzt ist die Verzerrung des Gesamtkörpers

$$\varepsilon_{eff} = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{K}{E_{eff} A}. \quad (3.2)$$

Wir stellen also den *wirklichen* Eigenschaften des Körpers - bezeichnet mit w - seine *effektiven* Eigenschaften ($_{eff}$) gegenüber. Wir wollen versuchen, einen Zusammenhang

zwischen beiden Größen zu finden. Offensichtlich ist die prozentuale Längenänderung des Körpers in beiden Fällen gleich. Wir können also die beiden Terme für die Verzerrung gleichsetzen.

Aus

$$\frac{K}{2E_w A_w} = \frac{K}{E_{eff} A}, \quad (3.3)$$

folgt

$$E_{eff} = 2E_w \frac{A_w}{A} = E_w \cdot \frac{2A_w l_0}{A l_0}. \quad (3.4)$$

In dieser Gleichung gibt der Term $\frac{2A_w l_0}{A l_0}$ den Volumenanteil an, den die Stäbe einnehmen. Allgemein nennt man diesen Term $n^S =$ Volumenanteil Skelett. Wie leicht zu sehen ist, kann n^S Werte zwischen 0 und 1 annehmen. Der verbleibende Anteil der Luft zwischen den Stäben ist dann $n = 1 - n^S$ und beschreibt die *Porosität* des Gesamtkörpers.

Wir haben jetzt also den Zusammenhang

$$\boxed{E_{eff} = n^S E_w}, \quad (3.5)$$

zwischen dem *makroskopisch* gesehenen Wert des E-Moduls E_{eff} und dem mikroskopisch betrachteten Wert E_w gefunden.

berträgt man dieses Beispiel nun auf unseren Fall des mit Flüssigkeit gefüllten porösen Körpers, so stellt man fest, daß eine mikroskopische Beschreibung so gut wie unmöglich ist. Uns ist nämlich die Struktur des porösen Körpers völlig unbekannt. Deshalb wollen wir den Körper jetzt *makroskopisch* betrachten, d.h. wir „verschmieren“ die Eigenschaften aus der Mikroebene. Damit tun wir etwas, das uns von den Gasen längst bekannt ist, wir betrachten den Körper Mischungstheoretisch.

3.2 Mischungstheorie

Wenn wir z.B. etwas über die Geschwindigkeit einer Flüssigkeit in einem porösen Körper erfahren wollen, so können wir nicht die Geschwindigkeit in den Kanälen messen, sondern wir bestimmen insgesamt die Massenausfuhr in einer bestimmten Zeit.

Betrachten wir also einen porösen Körper mit der Querschnittsfläche A und der Vergleichslänge l .

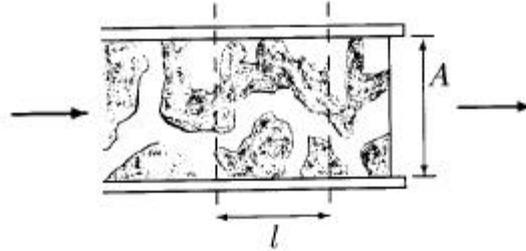


Abb. 3.3 Durchflossener poröser Körper

Schreiben wir F für Flüssigkeit und R für realistisch, dann beträgt die Masse der ausgeflossenen Flüssigkeit pro Zeiteinheit

$$\rho^{FR} A^{FR} v^{FR} \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}} \right]. \quad (3.6)$$

Dabei bezeichnet ρ^{FR} die Massendichte der Flüssigkeit, A^{FR} die Querschnittsfläche der Kanäle und v^{FR} die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in der Mikroebene. Nehmen wir wie im obigen Beispiel an, daß die Größe der ausgeflossenen Masse in der Mikro- und in der Makroebene gleich groß ist, dann gilt

$$\rho^{FR} A^{FR} v^{FR} \stackrel{\Delta x}{=} \rho^F A v^F. \quad (3.7)$$

ρ^F bedeutet dabei die „verschmierte“ Massendichte und v^F die „verschmierte“ Geschwindigkeit. Wir haben jetzt das Problem, daß wir weder die Massendichte noch die Geschwindigkeit eindeutig aus der Mikroebene übertragen können.

Auch mit dynamischen Experimenten zur Wellenausbreitung in Stoffen sind wir nur in der Lage, die echte makroskopische Geschwindigkeit der Welle zu messen, denn wir wissen nicht wie die Welle durch den Körper verläuft. Wir kennen die Struktur des Körpers nicht und können den Einfluß von Krümmungen nicht reproduzieren. Wir wissen z.B. nicht, ob die Flüssigkeit in vielen kleinen Kanälen oder in wenigen großen Kanälen durch den Körper fließt, aber wir kennen den Volumenanteil der Flüssigkeit und können sagen, daß die Masse in beiden Be-

trachtungsweisen gleich sein muß

$$\rho^F Al = \rho^{FR} \underbrace{n^F(Al)}_{V^{FR}} . \quad (3.8)$$

V^{FR} ist das realistische Volumen der Flüssigkeit, das in der Mikroebene zur Verfügung steht. Kürzen wir obige Gleichung, so finden wir eine Beziehung zwischen der realistischen Massendichte des Fluids und der „verschmierten“ Massendichte

$$\rho^F = n^F \rho^{FR} . \quad (3.9)$$

Wir wollen uns aber auch mit den anderen Größen, die die Vorgänge in einem zweikomponentigen Körper beschreiben, beschäftigen.

3.3 Felder

Wir definieren zunächst die Felder:

Wir haben einen Körper \mathcal{B} und betrachten einen Punkt \mathbf{x} in ihm.

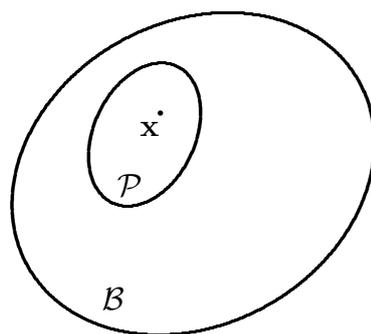


Abb. 3.3 Körper B

In diesem Modell gibt es vier Felder für die *Flüssigkeit*

- $\rho^F(\mathbf{x}, t)$ - Massendichte der Flüssigkeit
- $\mathbf{v}^F(\mathbf{x}, t)$ - Geschwindigkeit der Flüssigkeit } (3 Felder)

und vier Felder für das *Skelett*

$\mathbf{u}^S(\mathbf{x}, t)$ - Verschiebungsvektor des Skeletts } (3 Felder)

$\rho^S \approx \text{konst}$ - Massendichte des Skeletts.

Die Massendichte des Skeletts wird, wie oben erwähnt, nahezu konstant angenommen. Das Skelett dient als Bezugssystem, quasi als „Behälter“ für die Flüssigkeit. Um einen Zusammenhang zwischen den Feldern zu schaffen, benötigen wir noch eine zusätzliche Größe, auf die im weiteren noch ausführlich eingegangen wird, nämlich das Skalarfeld

$n(\mathbf{x}, t)$ - die Porosität.

Die Porosität gibt den Volumenanteil der Flüssigkeit an. Es gilt die klassische Sättigungsbedingung $n^S + n^F = 1$. Also ist

$$n \equiv n^F \equiv 1 - n^S . \quad (3.10)$$

3.4 Bilanzgleichungen im inertialen Bezugssystem

3.4.1 Flüssigkeit

Für die obigen Felder wollen wir nun mithilfe von Erhaltungs- und Bilanzgleichungen im inertialen Bezugssystem geltende Feldgleichungen finden. Zunächst stellen wir die klassischen Gleichungen für die partielle Massenerhaltung der Flüssigkeit

$$\frac{\partial \rho^F}{\partial t} + \text{div}(\rho^F \mathbf{v}^F) = 0 , \quad (3.11)$$

und die lokale Impulserhaltungsgleichung der Flüssigkeit

$$\frac{\partial \rho^F \mathbf{v}^F}{\partial t} + \text{div}(\rho^F \mathbf{v}^F \otimes \mathbf{v}^F - \mathbf{T}^F) = -\Pi(\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S) + \rho^F \mathbf{b}^F , \quad (3.12)$$

auf und leiten sie später her. Hier bezeichnet \mathbf{T}^F die partielle Cauchy'sche Spannung zu deren Definition Stoffgesetze benötigt werden. Der Term $\Pi(\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S)$ steht

für die Wechselwirkung zwischen Flüssigkeit und Skelett, die durch die relative Bewegung der Komponenten zueinander verursacht wird. Man kann sich leicht vorstellen, daß innere Reibung zwischen den beiden Komponenten auftritt, wenn sie verschiedene Geschwindigkeiten haben. Der Term $\rho^F \mathbf{b}^F$ gibt die Schwerkraft an.

3.4.2 Skelett

Wir können jetzt auch analoge Gleichungen für das Skelett aufstellen:

$$\frac{\partial \rho^S}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho^S \mathbf{v}^S) = 0 \quad - \quad \text{partielle Massenerhaltung für das Skelett,}$$

und mit $\mathbf{v}^S = \frac{\partial \mathbf{u}^S}{\partial t}$

$$\frac{\partial \rho^S \mathbf{v}^S}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho^S \mathbf{v}^S \otimes \mathbf{v}^S - \mathbf{T}^S) = \Pi(\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S) + \rho^S \mathbf{b}^S$$

- lokale Impulsbilanzgleichung für das Skelett.

Den Vorzeichenwechsel der Wechselwirkungskraft der Komponenten kann man mit dem Newtonschen actio-reactio-Prinzip erklären.

3.4.3 Porosität

Uns fehlt jetzt noch eine Gleichung für die Porosität n und zwar suchen wir nach einer Gleichung für die zeitliche Änderung von n . Zur Lösung dieses Problems gibt es in der Literatur zwei Ansätze. Entweder benötigt man eine zusätzliche Bilanzgleichung für die Porosität oder man benutzt mit $\rho^{FR} = \text{konst}$ die Beziehung $n^F = \frac{\rho^F}{\rho^{FR}}$. Ist dann die Massendichte bekannt, so benötigt man keine zusätzliche Gleichung für n , da n proportional zu ρ^F ist. Wir werden hier den ersten Ansatz verfolgen und leiten in Kap. 3.5.3 eine Bilanzgleichung für n her.

3.5 Herleitung der Bilanzgleichungen

Die Herleitung der Bilanzgleichungen geschieht hier für die Flüssigkeit.

3.5.1 Massenerhaltung

Zunächst wollen wir den Massenerhaltungssatz herleiten. Dazu nehmen wir einen Teil des Körpers \mathcal{B} und nennen ihn \mathcal{P} .

\mathcal{P}^F ist ein materielles Gebiet bezüglich F , d.h. daß sich das Gebiet mit den Teilchen der Flüssigkeit mitbewegt. Das Gebiet enthält also zu jedem Zeitpunkt dieselben Teilchen des Fluids. Deshalb ändert sich die Masse nicht

$$\forall \mathcal{P}^F \subset \mathcal{B} \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}^F} \rho^F(\mathbf{x}, t) dV = 0. \quad (3.13)$$

\mathcal{P}^F - Gebiet mit F-Kinematik (materiell bzgl. F)

$\rho^F dV$ ist die Masse der Flüssigkeit. Mit $M_{\mathcal{P}^F}^F$ gleich Masse des Fluids im Gebiet \mathcal{P}^F können wir also auch schreiben

$$\frac{d}{dt} M_{\mathcal{P}^F}^F(t) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}^F} \rho^F(\mathbf{x}, t) dV = 0. \quad (3.14)$$

Benutzen wir nun die Definition der Ableitung,¹ so können wir diese Gleichung in der folgenden Weise transformieren

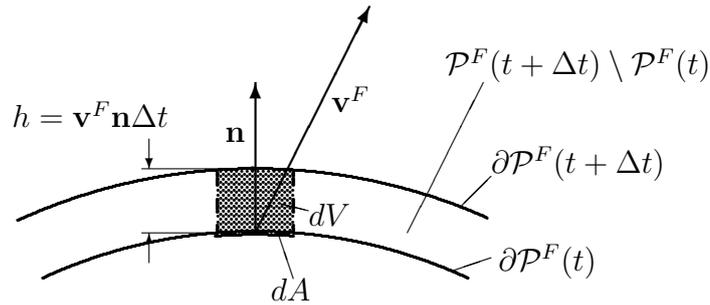
$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}^F} \rho^F(\mathbf{x}, t) dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{\mathcal{P}^F(t+\Delta t)} \rho^F(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV - \int_{\mathcal{P}^F} \rho^F(\mathbf{x}, t) dV \right\}. \quad (3.15)$$

Wir versuchen nun diesen Term aufzuspalten in erstens die Änderung der Funktion und zweitens die Änderung des Gebietes und schalten deshalb einen Nullterm ein.

Dann ergibt sich aus obiger Gleichung

¹ $\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{\mathcal{P}^F(t+\Delta t)} \rho^F(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV - \int_{\mathcal{P}^F(t)} \rho^F(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV + \int_{\mathcal{P}^F(t)} \rho^F(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV - \int_{\mathcal{P}^F(t)} \rho^F(\mathbf{x}, t) dV \right\}. \quad (3.16)$$


 Abb. 3.4 Zeitänderung des Materialgebietes \mathcal{P}^F

Wir fassen zusammen, dann ergibt sich

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\mathcal{P}^F(t+\Delta t) \setminus \mathcal{P}^F(t)} \rho^F(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\mathcal{P}^F(t)} \frac{\rho^F(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \rho^F(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} dV. \quad (3.17)$$

Ändert sich die Zeit nur infinitesimal, dann kann man das Volumenintegral auch als Flächenintegral multipliziert mit der Höhe schreiben. Der Ausdruck sieht dann folgendermaßen aus

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \oint_{\partial\mathcal{P}^F(t)} \rho^F(\mathbf{x}, t + \Delta t) \overbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^F \Delta t}^{dV} dA + \\ + \int_{\mathcal{P}^F(t)} \frac{\partial \rho^F}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dV \\ = \oint_{\partial\mathcal{P}^F(t)} \rho^F \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^F dA + \int_{\mathcal{P}^F(t)} \frac{\partial \rho^F}{\partial t} dV, \end{aligned} \quad (3.18)$$

wobei $\partial\mathcal{P}^F(t)$ die Oberfläche des Teilkörpers \mathcal{P}^F und \mathbf{n} den Einheitsvektor senkrecht zur Oberfläche und bezüglich \mathcal{P}^F nach außen orientiert bezeichnen. Aus Abb. 3.4 geht hervor, daß die Strecke h in Richtung des Vektors \mathbf{n} die Entfernung von der Fläche $\partial\mathcal{P}^F(t)$ bestimmt. \mathbf{v}^F ist die Geschwindigkeit eines Fluidteilchens auf der Fläche $\partial\mathcal{P}^F(t)$.

Mit dem Satz von Stokes² folgt

$$\implies \int_{\mathcal{P}(t)} \left\{ \frac{\partial\rho^F}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho^F \mathbf{v}^F) \right\} dV = 0 \quad (3.19)$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $\frac{1}{V(\mathcal{P}(t))}$ und erhalten

$$\frac{1}{V(\mathcal{P}(t))} \int_{\mathcal{P}(t)} \left\{ \frac{\partial\rho^F}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho^F \mathbf{v}^F) \right\} dV = 0. \quad (3.20)$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung³ können wir nun sagen

²Mit dem Satz von Stokes kann man ein Oberflächenintegral in ein Volumenintegral umwandeln. Es gilt $\oint_{\partial V} \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \operatorname{div} \mathbf{t} dV$

³Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung kann man die Fläche unter einer Kurve durch eine Rechteckfläche ersetzen, so daß für stetige Funktionen

$$\exists_{x_0 \in \langle a, b \rangle} \int_a^b f(x) dx = f(x_0)(b - a).$$

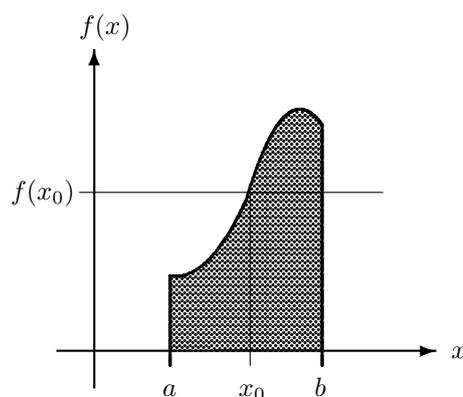


Abb. 3.5 Zum Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\exists_{\mathbf{x}_0} \frac{1}{V(\mathcal{P}(t))} \left\{ \frac{\partial \rho^F}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho^F \mathbf{v}^F) \right\}_{\mathbf{x}_0 \in \mathcal{P}^F(t)} V(\mathcal{P}^F(t)) = 0. \quad (3.21)$$

Wir nehmen nun einen Punkt \mathbf{x} und schließen ihn in einen immer kleiner werdenden Bereich ein. Dann wird schließlich $x_0 \approx x$.

$$\implies \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B} \quad \frac{\partial \rho^F}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho^F \mathbf{v}^F) = 0. \quad (3.22)$$

Damit haben wir den Massenerhaltungssatz bewiesen. Dies wollen wir auch für die Bewegungsgröße tun.

3.5.2 Bewegungsgröße

Der Impulsvektor (die Bewegungsgröße) für den Teilkörper \mathcal{P}^F ist definiert als

$$\int_{\mathcal{P}(t)} \rho^F \mathbf{v}^F dV. \quad (3.23)$$

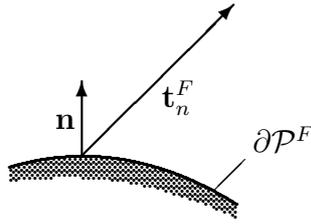
Setzen wir wie in der Newtonschen Mechanik voraus, daß es keine Wirkung von der Außenwelt auf den Körper gibt, so kann er seinen eigenen Impuls nicht ändern und es gilt der Erhaltungssatz

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}^F(t)} (\rho^F \mathbf{v}^F) dV \stackrel{\uparrow}{=} \underset{\text{Isolierung}}{=} 0. \quad (3.24)$$

Ist eine solche Isolierung nicht gegeben, so muß man eine Bilanzgleichung aufstellen

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}^F(t)} (\rho^F \mathbf{v}^F) dV = \oint_{\partial \mathcal{P}^F(t)} \mathbf{t}_n^F dA + \int_{\mathcal{P}^F(t)} \rho^F \mathbf{b}^F dV + \int_{\mathcal{P}^F(t)} \hat{\mathbf{p}}^F dV. \quad (3.25)$$

Der Einfluß der Umgebung wird hier durch die Kontaktkraft \mathbf{t} und die Volumenkraft \mathbf{b} wiedergegeben (siehe Abb. 3.5). Die Wechselwirkung zwischen den beiden Komponenten $-\Pi(\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S)$ wird hier durch $\hat{\mathbf{p}}^F$ ersetzt.


 Abb. 3.5 Kontaktkraft \mathbf{t}

Wir wollen hier den Fall der Impulserhaltung betrachten. Dann gilt nach Umformungen analog zum Massenerhaltungssatz

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}^F(t)} (\rho^F \mathbf{v}^F) dV &= \int_{\mathcal{P}^F(t)} \frac{\partial(\rho^F \mathbf{v}^F)}{\partial t} dV + \oint_{\partial \mathcal{P}^F(t)} (\rho^F \mathbf{v}^F) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^F dA = 0 \\
 \Rightarrow \frac{1}{V(\mathcal{P}^F(t))} \int_{\mathcal{P}^F(t)} \left\{ \frac{\partial(\rho^F \mathbf{v}^F)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho^F \mathbf{v}^F \otimes \mathbf{v}^F) - \operatorname{div} \mathbf{T}^F - \right. & \quad (3.26) \\
 \left. - \rho^F \mathbf{b}^F + \Pi(\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S) \right\} dV &= 0,
 \end{aligned}$$

und schließlich

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{B} \quad \frac{\partial \rho^F \mathbf{v}^F}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho^F \mathbf{v}^F \otimes \mathbf{v}^F - \mathbf{T}^F) = \rho^F \mathbf{b}^F - \Pi(\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S). \quad (3.27)$$

Genauso kann man die Gleichungen auch für das Skelett nachweisen. Dann betrachtet man ein Teilgebiet $\mathcal{P}^S(t) \in \mathcal{B}$ mit S -Kinematik und benutzt den Index S für Skelett.

3.5.3 Porosität

Für zweikomponentige Körper mit einer festen Komponente benötigt man im Gegensatz zur klassischen Mischungstheorie zusätzlich zu den Feldern $\rho^S, \mathbf{u}^S, \rho^F$ und \mathbf{v}^F die Porosität n .

Oft wird die Porosität als konstant angenommen. Dies ist, wie wir noch sehen werden, in bestimmten Fällen auch richtig. Es gibt aber Stoffe, wie z.B. granulare Stoffe, für die dieser Ansatz eine grobe Näherung darstellt. Dieses Problem ist in

den Schriften von Wilmański „Papers on the theory of porous media“ [15] ausführlich diskutiert worden. In Anlehnung daran stellen wir hier eine Bilanzgleichung für die Porosität n auf, die wir dann erklären wollen.

Bilanzgleichung für die Porosität:

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} + \text{Div } \Phi_0 \mathbf{F}^{S-1} (\dot{\mathbf{x}}^F - \dot{\mathbf{x}}^S) = \hat{n}.} \quad (3.28)$$

Zunächst stellen wir uns die grundsätzliche Frage, wieso sich die Porosität physikalisch ändert. Die Bilanzgleichung liefert zwei Gründe dafür, denn die „Quelle“ \hat{n} setzt sich aus zwei Anteilen zusammen. Der erste Term $\frac{\partial n}{\partial t}$ gibt die zeitliche Änderung der Porosität an. In der Lagrange’schen Schreibweise, in der \mathbf{X} ein Festkörperteilchen eines Körpers $\mathcal{B} \subset \mathcal{R}^3$ darstellt, ist $n = n(\mathbf{X}, t)$. Es soll die partielle Ableitung von n nach der Zeit t gebildet werden. Daraus folgt, daß $\mathbf{X} = \text{konst.}$ Das Skelett dient also als Bezugssystem, wir betrachten den Festkörper quasi als „Behälter“. Dies unterscheidet die Theorie poröser Medien von anderen Theorien mehrkomponentiger Körper.

Untersuchen wir das Festkörperteilchen nach Wirkung der Bewegungsfunktion

$$\mathbf{x} = \chi^S(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} = \chi^{S-1}(\mathbf{x}, t), \quad (3.29)$$

so können wir mit der materiellen Ableitung

$$\dot{\mathbf{x}}^S = \frac{\partial \chi^S}{\partial t}, \quad (3.30)$$

die partielle Ableitung von der Lagrange’schen Betrachtungsweise in die Euler’sche Betrachtungsweise transformieren:

$$\left. \frac{\partial n}{\partial t} \right|_{\mathbf{X} = \text{konst}} \implies \left. \frac{\partial n}{\partial t} \right|_{\mathbf{x} = \text{konst}} + (\text{grad } n) \cdot \mathbf{v}^S. \quad (3.31)$$

Diese Umformung läßt sich wie folgt herleiten. Aus

$$n(\mathbf{X}, t) = n(\boldsymbol{\chi}^{S^{-1}}(\mathbf{x}, t), t), \quad (3.32)$$

folgt

$$\frac{Dn}{Dt} = \frac{\partial n}{\partial x_k} \frac{\partial \chi_k^S(\mathbf{X}, t)}{\partial t} + \frac{\partial n(\mathbf{x}, t)}{\partial t}. \quad (3.33)$$

Bezeichnen wir die Geschwindigkeit des Skeletts mit $\mathbf{v}^S \equiv \dot{\mathbf{x}}^S(\mathbf{x}, t)$ und benutzen wir die Beziehungen (3.29) und (3.30), läßt sich dies folgendermaßen schreiben

$$\frac{Dn}{Dt} = \frac{\partial n}{\partial x_k} v_k^S + \frac{\partial n}{\partial t}. \quad (3.34)$$

Da n ein Skalarfeld ist, können wir diese Beziehung auch in der Form

$$\frac{Dn}{Dt} = \text{grad } n \cdot \mathbf{v}^S + \frac{\partial n}{\partial t}, \quad (3.35)$$

angeben. D.h. die materielle Ableitung setzt sich zusammen aus der lokalen Ableitung $\frac{\partial n}{\partial t}$ und der konvektiven Ableitung $\frac{\partial n}{\partial x_k} v_k^S$.

Der zweite Term der Bilanzgleichung $\text{Div } \Phi_0 \mathbf{F}^{S^{-1}}(\dot{\mathbf{x}}^F - \dot{\mathbf{x}}^S)$ stellt die Strömung durch einen bestimmten Bereich des Körpers dar. Hier wird mit Φ_0 ein Strömungskoeffizient bezeichnet, der Ausdruck $\mathbf{F}^{S^{-1}}(\dot{\mathbf{x}}^F - \dot{\mathbf{x}}^S)$ ist die *Lagrange'sche relative Geschwindigkeit*. Darin bedeuten $\dot{\mathbf{x}}^F$ und $\dot{\mathbf{x}}^S$ die Geschwindigkeiten der Flüssigkeit bzw. des Skeletts, $\mathbf{F}^{S^{-1}}$ ist die Inverse des Deformationsgradienten

$$\mathbf{F}^S = \text{Grad } \boldsymbol{\chi}^S. \quad (3.36)$$

Auch der zweite Anteil der Bilanzgleichung soll in die Euler'sche Schreibweise transformiert werden.

Mit $J^S = \det \mathbf{F}^S$ kann man schreiben

$$\begin{aligned}
 & \text{Div } \Phi_0 \mathbf{F}^{S^{-1}} (\dot{\mathbf{x}}^F - \dot{\mathbf{x}}^S) \\
 = & \text{Div } \Phi_0 J^S J^{S^{-1}} \mathbf{F}^{S^{-1}} (\dot{\mathbf{x}}^F - \dot{\mathbf{x}}^S) .
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Benutzt man, daß $\text{Div} (J^S \mathbf{F}^{S^{-T}}) \equiv 0$, so wird daraus unter Verwendung von Glg. (6.4.4) aus [2]

$$J^S \mathbf{F}^{S^{-T}} \cdot \text{Grad} \left[\Phi_0 J^{S^{-1}} (\dot{\mathbf{x}}^F - \dot{\mathbf{x}}^S) \right] , \tag{3.38}$$

und mit einer Transformation $\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{x}$

$$J^S \text{div} \left[\Phi_0 J^{S^{-1}} (\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S) \right] . \tag{3.39}$$

Dabei wurde $\dot{\mathbf{x}}^F(\mathbf{x}, t)$ vereinfachend durch \mathbf{v}^F ausgedrückt.

Wir haben jetzt die Euler'sche Darstellung der gesamten Bilanzgleichung

$$\frac{\partial n}{\partial t} + (\text{grad } n) \cdot \mathbf{v}^S + J^S \text{div} \left[\Phi_0 J^{S^{-1}} (\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S) \right] = \hat{n} . \tag{3.40}$$

Die Quelle \hat{n} wird durch Bewegungen in der Mikroebene verursacht, d.h. sie steht im Zusammenhang mit Relaxationsprozessen in den Poren. Im folgenden soll versucht werden, die Bilanzgleichung für die Porosität auf Bekanntes zurückzuführen. Dazu stellen wir hier einige Überlegungen an. Wir wissen nicht, ob wir in unserem Modell diese Relaxationsprozesse außer acht lassen dürfen, zumal Experimente gezeigt haben, daß dadurch eine starke Dämpfung hervorgerufen wird (siehe Wilanski [13]). Trotzdem wollen wir hier jetzt vereinfachend annehmen, daß

$$\hat{n} = 0 , \tag{3.41}$$

d.h. mikroskopische Relaxation ist nicht vorhanden. Dann kann die obige Gleichung zusätzlich verändert werden, indem mit $J^{S^{-1}}$ multipliziert wird

$$\begin{aligned}
 J^{S-1} \frac{\partial n}{\partial t} + \{ J^{S-1} (\text{grad } n) \cdot \mathbf{v}^S - \text{div}(\Phi_0 J^{S-1} \mathbf{v}^S) \} + \\
 + \text{div} \Phi_0 J^{S-1} \mathbf{v}^F = 0 .
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Durch Anwendung der Produktregel für die partielle Ableitung eines Produktes erhält man

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial n J^{S-1}}{\partial t} + \left\{ -n \frac{\partial J^{S-1}}{\partial t} + J^{S-1} (\text{grad } n) \cdot \mathbf{v}^S - \right. \\
 \left. - \text{div}(\Phi_0 J^{S-1} \mathbf{v}^S) \right\} + \\
 + \text{div}(\Phi_0 J^{S-1} \mathbf{v}^F) = 0 .
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Wir erinnern uns nun an den Massenerhaltungssatz für F

$$\frac{\partial \rho^F}{\partial t} + \text{div}(\rho^F \mathbf{v}^F) = 0 , \tag{3.44}$$

und stellen uns die Frage, ob diese beiden Gleichungen identisch sind. Dies würde nämlich bedeuten, daß wir im Fall $\hat{n} = 0$ keine zusätzliche Gleichung für die Porosität benötigen. Damit die Gleichungen identisch sind, müssen drei Punkte erfüllt sein:

1. Die Gleichung muß mit der konstanten Größe ρ^{FR} , der realistischen Mas- sendichte, multipliziert werden. Es ergibt sich dann für den ersten Term

$$\underbrace{n}_{n^F} J^{S-1} \rho^{FR} \cong \rho^F . \tag{3.45}$$

Dies ist unter Berücksichtigung von (3.9) offensichtlich nur für $J^{S-1} \approx 1$ der Fall.

2. Soll der 3. Term der Gleichung mit dem zweiten Term des Massenerhaltungssatzes übereinstimmen, so muß erfüllt sein

$$\Phi_0 J^{S-1} \rho^{FR} \cong \rho^F . \quad (3.46)$$

Daraus ergibt sich wiederum mit (3.9) die Voraussetzung, daß

$$\Phi_0 \cong n . \quad (3.47)$$

3. Der Klammerausdruck muß sich zu Null ergeben. D.h. es soll gelten

$$\begin{aligned} & -n \frac{\partial J^{S-1}}{\partial t} + J^{S-1} (\text{grad } n) \cdot \mathbf{v}^S - \text{div} \left(\underbrace{\Phi_0}_n J^{S-1} \mathbf{v}^F \right) = 0 . \\ \xrightarrow{\text{Glg. (6.4.3) aus [2]}} & -n \frac{\partial J^{S-1}}{\partial t} + (J^{S-1} \mathbf{v}^S) \cdot (\text{grad } n) - (J^{S-1} \mathbf{v}^S) \cdot \text{grad } n - \\ & - n \text{div } J^{S-1} \mathbf{v}^S \\ & = -n \left\{ \frac{\partial J^{S-1}}{\partial t} + \text{div } J^{S-1} \mathbf{v}^S \right\} = 0 . \end{aligned} \quad (3.48)$$

Unbewiesen benutzen wir die Ableitung der Determinante nach der Zeit

$$\frac{\partial J^{S-1}}{\partial t} = -J^{S-1} \text{div } \mathbf{v}^S . \quad (3.49)$$

Damit ergibt sich

$$-n \left\{ -J^{S-1} \text{div } \mathbf{v}^S + \text{div } J^{S-1} \mathbf{v}^S \right\} \cong 0 . \quad (3.50)$$

Dies ist ebenfalls nur für $J^S \approx 1$ gegeben.

Wir wollen also zur Vereinfachung im folgenden eine **Näherung** benutzen:

Unter den Annahmen, daß keine spontanen Relaxationsprozesse stattfinden, keine eigenen Strömungen auftreten und $J^S \approx 1$ gilt für $\rho^{FR} = \text{konst}$

$$\begin{array}{l}
 \hat{n} = 0 \\
 \boxed{n \cong \rho^F \frac{1}{\rho^{FR}}} \quad \Phi_0 \cong n \\
 \rho^{FR} = \text{konst} \quad J^S \approx 1
 \end{array}$$

3.6 Stoffgesetze

Die in den vorangegangenen Kapiteln aufgestellten Bilanzgleichungen für den zweikomponentigen Körper enthalten noch einige unbekannte Größen. Wir benötigen also noch zusätzliche Beziehungen, um sie zu vervollständigen. Diese weiteren Beziehungen werden jedoch nicht allgemeingültig sein wie es die bisher aufgestellten Bilanzgleichungen waren. Die neuen Gesetze werden **Stoffgesetze** oder **konstitutive Gleichungen** genannt, weil sie materialabhängig sind.

Zusammenfassend noch einmal, was uns bekannt ist: Es gibt die **Felder**

$$\rho^S = \text{konst} , \quad \mathbf{u}^S , \quad \rho^F , \quad \mathbf{v}^F \quad \text{und} \quad n \cong \frac{\rho^F}{\rho^{FR}} . \quad (3.51)$$

Wir setzen jetzt voraus, daß Wasser die Flüssigkeit ist, die durch unsere Zentrifuge gepreßt wird. Die realistische Massendichte von Wasser beträgt

$$\rho^{FR} \cong 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} . \quad (3.52)$$

Weiterhin kennen wir die **Bilanzgleichungen** im inertialen Bezugssystem

$$\begin{cases}
 \rho^S \mathbf{a}^S = \text{div } \mathbf{T}^S + \Pi(\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S) + \rho^S \mathbf{b}^S , \\
 \frac{\partial \rho^F}{\partial t} + \text{div}(\rho^F \mathbf{v}^F) = 0 , \\
 \rho^F \mathbf{a}^F = \text{div } \mathbf{T}^F - \Pi(\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S) + \rho^F \mathbf{b}^F .
 \end{cases} \quad (3.53)$$

Außer dem bekannten Stoffgesetz für ρ^{FR} benötigen wir also noch konstitutive Gleichungen für die bislang unbekanntenen Größen

$$\mathbf{T}^S, \quad \mathbf{T}^F, \quad \text{und} \quad \Pi,$$

um die Bilanzgleichungen (3.53) in Feldgleichungen umzuwandeln.

3.6.1 Beschleunigung von Skelett und Fluid

Zunächst wenden wir uns den linken Seiten der Impulsbilanzen zu. Setzt man kleine Verzerrungen voraus, also eine lineare Theorie, so kann man für die Beschleunigung des Skeletts schreiben

$$\mathbf{a}^S = \frac{\partial^2 \mathbf{u}^S}{\partial t^2}. \quad (3.54)$$

Da sich die Flüssigkeit durch das Skelett bewegt, können wir hier nicht sofort Linearität voraussetzen und versuchen deshalb die Beschleunigung allgemein auszudrücken. Betrachten wir wieder die Impulsänderung

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}^F(t)} (\rho^F \mathbf{v}^F) dV. \quad (3.55)$$

Nach Umformungen analog zum Nachweis des Massenerhaltungssatzes ergibt sich daraus

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}^F(t)} (\rho^F \mathbf{v}^F) dV = \int_{\mathcal{P}^F(t)} \frac{\partial(\rho^F \mathbf{v}^F)}{\partial t} dV + \oint_{\partial \mathcal{P}^F(t)} (\rho^F \mathbf{v}^F) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^F dA, \quad (3.56)$$

und mit dem Satz von Stokes

$$\int_{\mathcal{P}^F(t)} \frac{\partial(\rho^F \mathbf{v}^F)}{\partial t} dV + \int_{\mathcal{P}^F(t)} (\rho^F \mathbf{v}^F \otimes \mathbf{v}^F) dV. \quad (3.57)$$

Wir benutzen die Kettenregel und erhalten

$$\int_{\mathcal{P}^F(t)} \rho^F \frac{\partial \mathbf{v}^F}{\partial t} + \mathbf{v}^F \frac{\partial \rho^F}{\partial t} + (\rho^F \mathbf{v}^F \otimes \mathbf{v}^F) dV . \quad (3.58)$$

Nach Anwendung der Regel (6.4.6) aus [2] auf den Divergenzterm wird daraus folgender Ausdruck

$$\int_{\mathcal{P}^F(t)} \left[\rho^F \frac{\partial \mathbf{v}^F}{\partial t} + \underbrace{\mathbf{v}^F \frac{\partial \rho^F}{\partial t} + \mathbf{v}^F \operatorname{div} \rho^F \mathbf{v}^F}_{0} + (\operatorname{grad} \mathbf{v}^F)(\rho^F \mathbf{v}^F) \right] dV . \quad (3.59)$$

Der unterklammerte Term ist die mit \mathbf{v}^F multiplizierte linke Seite des Massenerhaltungssatzes und ergibt sich deshalb zu Null. Unter Berücksichtigung des 2. Newtonschen Axioms⁴ können wir jetzt die Beschleunigung der Flüssigkeit folgendermaßen angeben

$$\mathbf{a}^F = \frac{\partial \mathbf{v}^F}{\partial t} + (\operatorname{grad} \mathbf{v}^F) \mathbf{v}^F . \quad (3.60)$$

Im Vergleich zur Beschleunigung des Skeletts ist hier ein zusätzlicher Term vorhanden. Dabei handelt es sich um die materielle Ableitung bzgl. des Fluids. Wir schreiben diese in Komponenten

$$\longrightarrow \frac{\partial v^{Fl}}{\partial x^k} v^{Fk} , \quad (3.61)$$

das ist z.B.

$$\frac{\partial v_r^F}{\partial r} v_r^F . \quad (3.62)$$

Darin bedeutet v_r^F die radiale Geschwindigkeit des Fluids. Mit der Produktregel ergibt sich daraus

⁴ 2. Newtonsches Axiom: $\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m\mathbf{a}$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (v_r^F)^2}{\partial r}. \quad (3.63)$$

Wir stellen uns die Frage, ob hier die lineare Theorie⁵ angewendet werden kann, sodaß dieser Term vernachlässigt werden darf. Dadurch würde für die Flüssigkeit eine zum Skelett analoge Beschleunigungsgleichung entstehen. Betrachtet man jedoch eine Zentrifuge, so stellt man fest, daß in ihr die führende Geschwindigkeit die radiale Geschwindigkeit ist. v_r^F wird also so groß sein, daß dieses Quadrat nicht vernachlässigbar ist. Dagegen wird die Zeitableitung wegfallen, da wir die Untersuchungen im nicht-inertialen Bezugssystem für eine Kreisbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit vornehmen werden. Dort liegt eine explizite Zeitunabhängigkeit vor, d.h. in den Gleichungen ist die Zeit t nicht als Variable vorhanden.

Jetzt kommen wir zur rechten Seite der Impulssätze und wollen zunächst ein Stoffgesetz für die Cauchy'schen Spannungstensoren \mathbf{T}^S und \mathbf{T}^F aufstellen. Dies geschieht in Anlehnung an Wilmanski (Porous media at Finite Strains, in [15]). Dort wurde allerdings eine nicht-lineare Theorie mit großen Verzerrungen vorausgesetzt, während wir uns hier auf eine lineare Theorie mit kleinen Verzerrungen beschränken wollen.

3.6.2 Spannung im Skelett

Beginnen wir mit dem partiellen Spannungstensor für das Skelett. Wegen der Linearität kann man für \mathbf{T}^S das Hookesche Gesetz verwenden und findet eine Beziehung zum Verzerrungstensor \mathbf{E}^S

$$\mathbf{T}^S = \lambda^S(n_0)(\mathbf{E}^S \cdot \mathbf{1})\mathbf{1} + 2\mu^S(n_0)\mathbf{E}^S + \gamma\rho^F \frac{n - n_0}{\tau\mathcal{N}}. \quad (3.64)$$

⁵In der linearen Theorie dürfen die Quadrate und höhere Potenzen von sehr kleinen Größen ohne Berücksichtigung bleiben.

Hier sind die Lam-Konstanten λ^S und μ^S von der Anfangsporosität n_0 abhängig. Durch die relative Bewegung der Komponenten entsteht der zusätzliche Term $\gamma \rho^F \frac{n-n_0}{\tau \mathcal{N}}$. Darin sind γ und $\tau \mathcal{N}$ Materialkonstanten, n und ρ^F sind veränderlich. Wir vermuten allerdings, daß die Änderung der Massendichte ρ^F sehr klein ist. Dies bedeutet

$$\left| \frac{\rho^F - \rho_0^F}{\rho_0^F} \right| \ll 1, \quad (3.65)$$

wobei ρ_0^F für die Anfangsmassendichte des Fluids steht. Mit Glg. (3.9) und der Definition der Anfangsporosität

$$n_0 = \frac{\rho_0^F}{\rho^{FR}}, \quad (3.66)$$

können wir jetzt den Ausdruck $\rho^F(n - n_0)$, der in der Spannungsgleichung enthalten ist, umformen

$$\rho^F(n - n_0) = \rho^F \left(\frac{\rho^F}{\rho^{FR}} - n_0 \right) = \rho^F \frac{\rho^F - \rho_0^F}{\rho^{FR}}. \quad (3.67)$$

Dieser Ausdruck wird durch Erweiterung derart umgeformt, daß darin die kleine Größe (3.65) enthalten ist

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \rho_0^F \left(\frac{\rho^F - \rho_0^F}{\rho_0^F} + \frac{\rho_0^F}{\rho_0^F} \right) \frac{\rho^F - \rho_0^F}{\rho_0^F} \frac{\rho_0^F}{\rho^{FR}} = \\ & = \rho_0^F \frac{\rho_0^F}{\rho^{FR}} \left(\frac{\rho^F - \rho_0^F}{\rho_0^F} + \underbrace{\left(\frac{\rho^F - \rho_0^F}{\rho_0^F} \right)^2}_0 \right). \end{aligned} \quad (3.68)$$

Wegen der linearen Theorie kann das Quadrat von (3.65) vernachlässigt werden. Es ergibt sich dann schließlich

$$\rho^F(n - n_0) = n_0(\rho^F - \rho_0^F). \quad (3.69)$$

Damit können wir die partielle Spannung im Skelett folgendermaßen angeben

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^S &= \lambda^S (\mathbf{E}^S \cdot \mathbf{1}) \mathbf{1} + 2\mu^S \mathbf{E}^S + \frac{\gamma}{\tau \mathcal{N}} n_0 (\rho^F - \rho_0^F), \\ \mathbf{E}^S &= \frac{1}{2} (\text{grad } \mathbf{u}^S + (\text{grad } \mathbf{u}^S)^T). \end{aligned} \quad (3.70)$$

3.6.3 Spannung in der Flüssigkeit

Wir kommen jetzt zu der für unsere Fragestellung noch wichtigeren Größe, dem Cauchy'schen Spannungstensor \mathbf{T}^F für das Fluid. Es folgt aus der Thermodynamik, daß

$$\mathbf{T}^F = -p^F \mathbf{1}. \quad (3.71)$$

Den partiellen Druck p^F kann man hier in folgender Weise angeben

$$p^F = \underbrace{(\rho^F)^2 \frac{\partial \psi^F}{\partial \rho^F}}_{\text{klassisch}} + \frac{\gamma}{\tau \mathcal{N}} n_0 (\rho^F - \rho_0^F). \quad (3.72)$$

Darin ist der erste Term die Definition für den partiellen Druck nach *klassischem*, thermodynamischem Ansatz, worin ψ^F für die Helmholtzsche freie Energie steht. Der zweite Term geht wiederum auf die Wechselwirkung der Komponenten im zweikomponentigen Körper zurück.

Zur Veranschaulichung des klassischen Ansatzes für p^F dient ein Vergleich mit dem Porenwasserdruck p_w . In der Bodenmechanik gilt nämlich in Ausnahmefällen, daß p^F proportional zu der mikroskopisch gemessenen Größe p_w ist. D.h.

$$\text{statisch : } p^F = n p_w.$$

In Anlehnung an Wilmanski [15] wollen wir diesen Ausdruck vereinfachen und benutzen dazu eine Näherung. Zunächst wird die Größe κ^F , die Kompressibilität, definiert

$$\kappa^F = -\frac{1}{v^F} \frac{\partial v^F}{\partial p_{kl}^F}. \quad (3.73)$$

Hier bezeichnet $v^F = \frac{1}{\rho^F}$ das spezifische Volumen der Flüssigkeit. Der Index kl steht für klassisch.

Unter der Voraussetzung, daß die Masse der Flüssigkeit konstant gehalten wird, handelt es sich bei der Kompressibilität also um die Änderung des Volumens unter Druck pro Masseneinheit. Deshalb kann man diese Größe bestimmen, wenn man die Druckänderung in einem mit Flüssigkeit gefüllten Kolben mißt, denn aus der Druckänderung kann man auf die Volumenänderung schließen

$$\Delta p_{kl}^F \longrightarrow \Delta v^F.$$

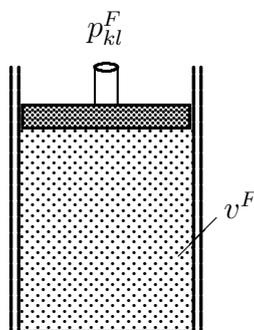


Abb. 3.6 Mit Flüssigkeit gefüllter Kolben

Die klassische Definition des partiellen Drucks soll nun auf unsere Variablen übertragen werden. Dazu formen wir zunächst Glg. (3.73) mit $v^F = \frac{1}{\rho^F}$ um

$$\kappa^F = -\rho^F \frac{\partial \frac{1}{\rho^F}}{\partial p_{kl}^F}. \quad (3.74)$$

Wird berücksichtigt, daß

$$\underbrace{\frac{\partial \left(\rho^F \frac{1}{\rho^F} \right)}{\partial p_{kl}^F}}_0 = \rho^F \frac{\partial \frac{1}{\rho^F}}{\partial p_{kl}^F} + \frac{1}{\rho^F} \frac{\partial \rho^F}{\partial p_{kl}^F}, \quad (3.75)$$

kann man dies auch folgendermaßen schreiben

$$\kappa^F = \frac{1}{\rho^F} \frac{\partial \rho^F}{\partial p_{kl}^F}. \quad (3.76)$$

Damit ist

$$\frac{\partial p_{kl}^F}{\partial \rho^F} = \frac{1}{\rho^F \kappa^F}. \quad (3.77)$$

Die Änderung der Kompressibilität unter Druck ist für Wasser so klein (Erfahrungswert $\kappa_W^{-1} = 0,5 \cdot 10^9$ Pa), daß wir zur Lösung dieser Gleichung annehmen dürfen

$$\boxed{\kappa^F \cong \text{konst.}} \quad (3.78)$$

Dabei müssen wir allerdings berücksichtigen, daß κ^F eine „verschmierte“ Größe ist, d.h. es geht hier die Änderung der Porosität ein. D.h.

$$\kappa^F \sim n_0 \kappa_W. \quad (3.79)$$

Durch Umformung von Glg. (3.76) ergibt sich

$$dp_{kl}^F = \frac{1}{\kappa^F} \frac{d\rho^F}{\rho^F}. \quad (3.80)$$

Wir integrieren und erhalten

$$p_{kl}^F = p_0^F + \frac{1}{\kappa^F} \ln \frac{\rho^F}{\rho_0^F}, \quad (3.81)$$

mit dem Anfangswert $p_0^F = p^F(\rho_0^F)$. Hier wurde durch die Anfangsmassendichte ρ_0^F geteilt, um es zu vermeiden, den Logarithmus einer physikalischen Größe bilden zu müssen.

Mit dem ersten Glied einer Taylor-Reihenentwicklung⁶ kann man bestimmen

$$\ln \frac{\rho^F}{\rho_0^F} = \ln \left(\frac{\rho^F - \rho_0^F}{\rho_0^F} + 1 \right) \cong \frac{\rho^F - \rho_0^F}{\rho_0^F} . \quad (3.82)$$

Daraus folgt

$$p_{kl}^F \cong p_0^F + \frac{1}{\kappa^F \rho_0^F} (\rho^F - \rho_0^F) . \quad (3.83)$$

Damit erhalten wir unter Berücksichtigung der Wechselwirkung zwischen den beiden Komponenten das Stoffgesetz für das Fluid

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^F &= -p^F \mathbf{1} , \\ p^F &= p_0^F + \left(\frac{1}{\kappa^F \rho_0^F} + \frac{\gamma n_0}{\tau \mathcal{N}} \right) (\rho^F - \rho_0^F) . \end{aligned} \quad (3.84)$$

⁶Taylor-Reihenentwicklung für $\ln(1+x)$ um $x_0 = 0$:

$$\ln(1+x) \stackrel{Taylor}{\cong} 0 + \frac{1}{1+x_0} \Big|_{x_0=0} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+x_0)^2} \Big|_{x_0=0} x^2 \dots$$

Interessiert nur das erste Glied, so ergibt sich $\ln(1+x) \cong x$. D.h., der Logarithmus wurde für einen kleinen Bereich durch eine Gerade ersetzt.

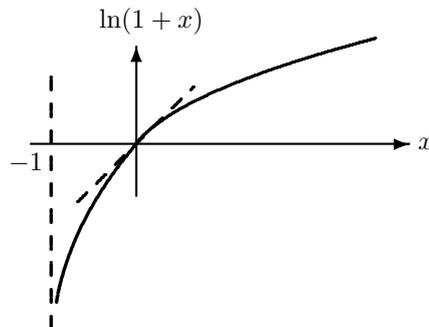


Abb. 3.7 Ersatz des Logarithmus durch eine Gerade

3.6.4 Abschätzung der Größenordnung von Π

Wir haben die Stoffgesetze für \mathbf{T}^S und \mathbf{T}^F gefunden. Eine weitere unbekannte Größe ist die Durchlässigkeit Π , deren Größenordnung jetzt abgeschätzt werden soll. Dazu schauen wir uns eine Anlage an, durch die Wasser hindurchfließt. Im Gegensatz zur Zentrifuge dreht sich diese Anlage allerdings nicht.

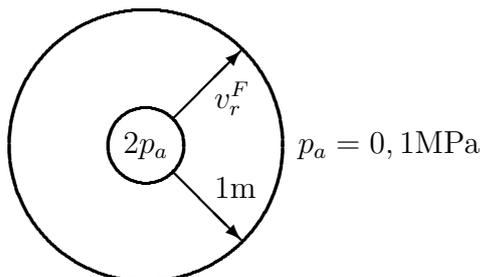


Abb. 3.8 Wasserdurchflossene Anlage

Es soll schon soviel Wasser durch den im äußeren Ring befindlichen porösen Körper geflossen sein, daß sich dessen Lage stabilisiert hat. D.h. es ist

$$v_r^S = 0. \quad (3.85)$$

Lassen wir die Volumenkräfte außer acht, so ergibt sich aus Glg. (3.53)

$$\rho^F \mathbf{a}^F = \text{div } \mathbf{T}^F - \Pi(\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S). \quad (3.86)$$

Unter Berücksichtigung von

$$\text{div } \mathbf{T}^F = \text{grad } p^F \cdot \mathbf{1}, \quad (3.87)$$

und mit (3.84) erhalten wir

$$\rho^F \mathbf{a}^F = -\text{grad } p^F - \Pi(\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S). \quad (3.88)$$

Da $v_r^F = \text{konst}$ wird die linke Seite zu Null und es ergibt sich das Darcy'sche Gesetz⁷

$$-\text{grad } p^F = \Pi(\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S). \quad (3.89)$$

Hier können wir jetzt einige Größen zahlenmäßig angeben. Für die hier betrachtete Anlage ist die Druckänderung

$$\text{grad } p^F \cong -\frac{0,1\text{MPa}}{1\text{m}}. \quad (3.90)$$

Orientiert an der Ausflußgeschwindigkeit von Wasser aus einem Wasserhahn⁸ schätzen wir die Geschwindigkeit der Flüssigkeit ab

$$\mathbf{v}^F = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (3.91)$$

⁷Aus der Bodenmechanik ist uns das Darcy'sche Gesetz in der Form

$$v = k \cdot I,$$

mit

v: Filtergeschwindigkeit

k: Durchlässigkeitsbeiwert

I: hydraulisches Gefälle bzw. hydraulischer Gradient

bekannt. Wir können diese betragsmäßige Darstellungsweise mit der vektoriellen Schreibweise direkt vergleichen, wenn wir Glg. (3.89) umformen. Es ergibt sich

$$(\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S) = \Pi^{-1}(-\text{grad } p^F).$$

$$\text{Zum Vergleich :} \quad v = k \cdot I.$$

⁸Bei einer Messung der benötigten Zeit für das Füllen eines 10l-Eimers aus einem üblichen Wasserhahn ergibt sich eine Zeit t von knapp $1\frac{1}{2}$ Minuten. Der Wasserhahn hat einen Durchmesser $d = 1/2$ Zoll = 1,3 cm, also eine Querschnittsfläche $A = \frac{\Pi d^2}{4} \approx 1,3 \text{ cm}^2$. Mit der Gleichung für den Durchfluß $Q = v \cdot A$ kann man daraus eine Ausflußgeschwindigkeit v von etwa $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ bestimmen.

Dies zusammengefaßt, ergibt als Größenordnung für Π

$$\Pi \approx 0,1 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{ms}^2} \frac{1}{\text{m}} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}} = \underline{\underline{10^5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \text{s}}}}. \quad (3.92)$$

Kapitel 4

Zentrifuge

Wir haben jetzt also die vollständigen Feldgleichungen für ein inertiales Bezugssystem aufgestellt. Sie sollen im folgenden für die Untersuchung einer Zentrifuge spezifiziert werden.

4.1 Transformation der Feldgleichungen ins nicht-inertiale Bezugssystem

Die Feldgleichungen für die Flüssigkeit lauten im inertialen Bezugssystem

$$\begin{cases} \rho^F \mathbf{a}^F = -\text{grad } p^F - \Pi(\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S) + \rho^F \mathbf{b}^F \\ \frac{\partial \rho^F}{\partial t} + \text{div}(\rho^F \mathbf{v}^F) = 0 . \end{cases} \quad (4.1)$$

Wir wollen sie nun in ein nicht-inertiales Bezugssystem transformieren. Unter der Annahme, daß die Translation $\mathbf{d} = 0$, können wir - wie in Kapitel 2 gezeigt - die Geschwindigkeiten des Fluids sowie des Skeletts im nicht-inertialen Bezugssystem angeben

$$\begin{aligned} {}^* \mathbf{v}^F &= \mathbf{O} \mathbf{v}^F + \dot{\mathbf{O}} \mathbf{x} , \\ {}^* \mathbf{v}^S &= \mathbf{O} \mathbf{v}^S + \dot{\mathbf{O}} \mathbf{x} . \end{aligned} \quad (4.2)$$

Die Differenz dieser beiden Geschwindigkeiten ist

$$\boxed{{}^*\mathbf{v}^F - {}^*\mathbf{v}^S = \mathbf{O}(\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S)} . \quad (4.3)$$

Man sieht, daß dieser Geschwindigkeitsunterschied *objektiv* aus dem inertialen Bezugssystem transformiert werden kann. D.h., daß die vom bewegten Beobachter gemessene Größe aus der vom ruhenden Beobachter gemessenen Größe allein durch die Multiplikation mit dem Tensor \mathbf{O} hervorgeht, die die Größe vom einen System in das dazu gedrehte System transformiert.

Um dies zu benutzen wird die Impulsbilanz mit dem Tensor \mathbf{O} multipliziert

$$\rho^F \mathbf{O} \mathbf{a}^F = -\mathbf{O} \operatorname{grad} p^F - \Pi \mathbf{O} (\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S) + \rho^F \mathbf{O} \mathbf{b}^F . \quad (4.4)$$

Mit der Tabelle auf S. 31 und dem eben gesagten können wir diese Gleichung umformen und erhalten

$$\begin{aligned} \rho^F \left[{}^*\mathbf{a}^F - 2\mathbf{W}^* \mathbf{v} + \mathbf{W}^2 {}^*\mathbf{x} - \dot{\mathbf{W}} {}^*\mathbf{x} \right] &= -\operatorname{grad}^* p^F - \Pi ({}^*\mathbf{v}^F - {}^*\mathbf{v}^S) + \\ &+ \rho^F \left[{}^*\mathbf{b}^F - 2\mathbf{W}^* \mathbf{v} + (\mathbf{W}^2 - \dot{\mathbf{W}}) {}^*\mathbf{x} \right] . \end{aligned} \quad (4.5)$$

Dies läßt sich noch vereinfachen zu

$$\rho^F {}^*\mathbf{a}^F = -\operatorname{grad}^* p^F - \Pi ({}^*\mathbf{v}^F - {}^*\mathbf{v}^S) + \rho^F {}^*\mathbf{b}^F . \quad (4.6)$$

Um ${}^*\mathbf{a}^F$ zu bestimmen, transformieren wir Glg. (3.60) in ein nicht-inertiales Bezugssystem. Die Beschleunigung des Fluids lautet dann

$${}^*\mathbf{a}^F = \underbrace{\frac{\partial {}^*\mathbf{v}^F}{\partial t}}_0 + (\operatorname{grad}^* {}^*\mathbf{v}^F) {}^*\mathbf{v}^F . \quad (4.7)$$

Wir nehmen für die Zentrifuge an, daß die Vorgänge nicht explizit von der Zeit abhängig sind, d.h. die Zeit t ist nicht als Variable in der Gleichung vorhanden.

Aus diesem Grund ist die Zeitableitung in obiger Gleichung identisch Null und die Beschleunigung besteht nur noch aus dem konvektiven Anteil der Geschwindigkeit

$${}^* \mathbf{a}^F = (\text{grad}^* {}^* \mathbf{v}^F) {}^* \mathbf{v}^F . \quad (4.8)$$

Zur Vereinfachung wird im folgenden vorausgesetzt, daß sich das Skelett bereits zusammengepreßt hat, d.h. daß sich die Bewegung des Skeletts stabilisiert hat. Es ist dann

$${}^* \mathbf{v}^S \equiv 0 . \quad (4.9)$$

Außerdem wollen wir die Außenkraft im inertialen Bezugssystem vernachlässigen, sodaß

$$\mathbf{b} \equiv 0 . \quad (4.10)$$

Mit diesen Annahmen läßt sich (4.5) folgendermaßen darstellen

$$\begin{aligned} \rho^F (\text{grad}^* {}^* \mathbf{v}^F) {}^* \mathbf{v}^F &= - \text{grad}^* p^F - \Pi {}^* \mathbf{v}^F + \\ &+ \rho^F [2\mathbf{W} {}^* \mathbf{v} - (\mathbf{W}^2 - \dot{\mathbf{W}}) {}^* \mathbf{x}] . \end{aligned} \quad (4.11)$$

4.2 Ansätze

Um die Feldgleichungen für unseren Sonderfall zu spezifizieren, machen wir einige Ansätze.

1. Im weiteren werden die Überlegungen in Polarkoordinaten ausgedrückt. Wir

wählen dazu das folgende Basissystem.

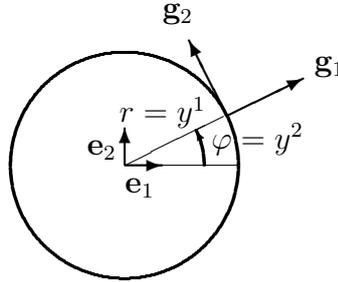


Abb. 4.1 Basissystem

Kovariante Basisvektoren:

$$\begin{cases} \mathbf{g}_1 = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2, & |\mathbf{g}_1| = 1 \\ \mathbf{g}_2 = -r(\sin \varphi \mathbf{e}_1 - \cos \varphi \mathbf{e}_2), & |\mathbf{g}_2| = r \\ \mathbf{g}_3 = \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

Kontravariante Basisvektoren:

$$\begin{cases} \mathbf{g}^1 = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{g}^2 = -\frac{1}{r}(\sin \varphi \mathbf{e}_1 - \cos \varphi \mathbf{e}_2), \\ \mathbf{g}^3 = \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

Außerdem werden Christoffel-Symbole¹ $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ benutzt, um partielle Ableitungen von kovarianten Basisvektoren auf die Basis zurückzuführen. Wir geben hier schon einmal deren Werte an

$$\Gamma_{22}^1 = -r,$$

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r},$$

alle anderen $\equiv 0$.

2. Eine explizite Zeitabhängigkeit wurde schon ausgeschlossen. Das bedeutet, daß alle Größen Funktionen nur von r sind und nicht von φ . Eine Größe

¹ $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{\partial \mathbf{g}_\alpha}{\partial y^\beta} \cdot \mathbf{g}^\gamma,$

$$\begin{aligned} \text{Bsp.: } \Gamma_{21}^2 &= \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial y^1} \cdot \mathbf{g}^2 = \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial r} \cdot \mathbf{g}^2 = \\ &= -(\sin \varphi \mathbf{e}_1 - \cos \varphi \mathbf{e}_2) \cdot \left(-\frac{1}{r}\right) (\sin \varphi \mathbf{e}_1 - \cos \varphi \mathbf{e}_2) = \\ &= \frac{1}{r}(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = \frac{1}{r} \end{aligned}$$

hat also auf jeder Stelle auf einer Kreisbahn um den Mittelpunkt denselben Wert.

4.3 Massenbilanz

Mit diesen Ansätzen wollen wir jetzt die Feldgleichungen umformen. Zunächst die Massenbilanz

$$\frac{\partial \rho^F}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho^F \mathbf{v}^F) = 0. \quad (4.12)$$

Wir haben vorausgesetzt, daß

$$\frac{\partial \rho^F}{\partial t} \equiv 0. \quad (4.13)$$

Damit folgt aus (4.12), wenn die partielle Ableitung durch die kovariante Ableitung² für krummlinige Koordinaten ersetzt wird

$$\begin{aligned} & \nabla_\alpha(\rho^F v^{F\alpha}) = 0 \\ \implies & \frac{\partial \rho^F v^{F\alpha}}{\partial y^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \rho^F v^{F\beta} = 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Mit $v^{F1} = v_r$ ergibt dies

$$\frac{d\rho^F v_r}{dr} + \frac{1}{r} \rho^F v_r = 0. \quad (4.15)$$

Durch Multiplikation mit r und Einfügen des Terms $\frac{d}{dr}r = 1$ erhält man

$$r \frac{d\rho^F v_r}{dr} + \rho^F v_r \frac{d}{dr}r = 0. \quad (4.16)$$

²Kovariante Ableitung:

$$\operatorname{grad} \mathbf{v} = \nabla_\alpha v^\beta := \frac{\partial v^\beta}{\partial y^\alpha} + \Gamma_{\alpha\mu}^\beta v^\mu$$

Mit der Produktregel folgt daraus

$$\implies \boxed{\frac{d}{dr}(r\rho^F v_r) = 0.} \quad (4.17)$$

Wir integrieren dies und erhalten

$$\boxed{r\rho^F v_r = \mathcal{A}.} \quad (4.18)$$

Darin ist \mathcal{A} eine Konstante, die wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit bestimmen wollen. Zur Veranschaulichung dieser Größe bezeichnen wir den äußeren Radius unserer Anlage mit R_a und können schreiben

$$\mathcal{A} = R_a \rho^F(R_a) v_r(R_a). \quad (4.19)$$

Dividieren wir jetzt durch den Radius, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\mathcal{A}}{R_a} = \rho^F(R_a) v_r(R_a) \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}} \right]. \quad (4.20)$$

Jetzt wird deutlich, daß die Größe $\frac{\mathcal{A}}{R_a}$ angibt, wieviel Wasser pro Flächen- und Zeiteinheit aus der Anlage ausfließt. Deshalb wird $\frac{\mathcal{A}}{R_a}$ als **Ergiebigkeit** der Anlage bezeichnet.

4.4 Impulsbilanz

Wir suchen nach einer weiteren Bestimmungsgleichung für die Ergiebigkeit $\frac{\mathcal{A}}{R_a}$ der Zentrifuge. Um diese zu finden, werden wir die Impulsbilanz in Komponenten schreiben und einige Abschätzungen machen. Der Übersichtlichkeit halber werden im folgenden bei den Basisvektoren die *-Indizes weggelassen, obwohl wir uns im nicht-inertialen Bezugssystem befinden.

Zunächst wieder die linke Seite: In Kapitel 4.1 wurde bestimmt (Glg. (4.8))

$${}^* \mathbf{a}^F = (\text{grad} {}^* \mathbf{v}^F) {}^* \mathbf{v}^F . \quad (4.21)$$

Mit

$$\text{grad} {}^* \mathbf{v}^F = {}^* \nabla_\beta {}^* v^{F\alpha} \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}^\beta , \quad (4.22)$$

ergibt sich in Koordinatenschreibweise

$$\begin{aligned} (\text{grad} {}^* \mathbf{v}^F) {}^* \mathbf{v}^F &= ({}^* \nabla_\beta {}^* v^{F\alpha} \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}^\beta) {}^* v^{F\beta} \mathbf{g}_\beta \\ &= {}^* \nabla_\beta {}^* v^{F\alpha} {}^* v^{F\beta} \mathbf{g}_\alpha . \end{aligned} \quad (4.23)$$

Wird die kovariante Ableitung ersetzt

$${}^* \nabla_\beta {}^* v^{F\alpha} = \frac{\partial {}^* v^{F\alpha}}{\partial y^\beta} + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha {}^* v^{F\mu} , \quad (4.24)$$

so erhalten wir

$$(\text{grad} {}^* \mathbf{v}^F) {}^* \mathbf{v}^F = \left(\frac{\partial {}^* v^{F\alpha}}{\partial y^\beta} + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha {}^* v^{F\mu} \right) {}^* v^{F\beta} \mathbf{g}_\alpha . \quad (4.25)$$

In Komponentenschreibweise wird daraus³

³Mit $y^1 = r$, $y^2 = \varphi$, dritte Komponente $\equiv 0$, ergibt sich

$$\begin{aligned} \alpha = \beta = \mu = 1 : & \quad \frac{\partial {}^* v^{F1}}{\partial r} {}^* v^{F1} \mathbf{g}_1 \\ \alpha = 1, \beta = \mu = 2 : & \quad -r {}^* v^{F2} {}^* v^{F2} \mathbf{g}_1 \\ \alpha = 2, \beta = 1, \mu = 2 : & \quad \left(\frac{\partial {}^* v^{F2}}{\partial r} + \frac{1}{r} {}^* v^{F2} \right) {}^* v^{F1} \mathbf{g}_2 \\ \alpha = \beta = 2, \mu = 1 : & \quad \frac{1}{r} {}^* v^{F1} {}^* v^{F2} \mathbf{g}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^* \mathbf{a}^F = & \left(\frac{\partial {}^* v^{F1}}{\partial r} {}^* v^{F1} - r {}^* v^{F2} {}^* v^{F2} \right) \mathbf{g}_1 \\
 & + \left(\frac{\partial {}^* v^{F2}}{\partial r} {}^* v^{F1} + 2 \frac{1}{r} {}^* v^{F1} {}^* v^{F2} \right) \mathbf{g}_2 .
 \end{aligned}
 \tag{4.26}$$

Um dies zu vereinfachen, formen wir in Matrizenschreibweise um

$$\begin{aligned}
 ({}^* v^{F\alpha})^T &= (v_r, \frac{1}{r} v_\varphi, 0)^T , \\
 ({}^* v_\alpha^F)^T &= (v_r, r v_\varphi, 0)^T .
 \end{aligned}
 \tag{4.27}$$

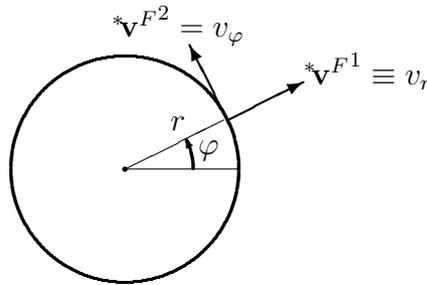


Abb. 4.2 Geschwindigkeitskomponenten

Die kovarianten Komponenten der Geschwindigkeit lassen sich dabei durch Multiplikation der kontravarianten Komponenten mit dem kovarianten Metrikoeffizienten⁴ bestimmen.

$${}^* v_\alpha^F = {}^* v^{F\beta} g_{\alpha\beta} .
 \tag{4.28}$$

Durch Normierung kann man die Geschwindigkeit umformen

$${}^* \mathbf{v}^F = {}^* v_\alpha^F \mathbf{g}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^3 \underbrace{{}^* v^{F\alpha}}_{v_\varphi} \sqrt{g_{\alpha\alpha}} \frac{\mathbf{g}_\alpha}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} .
 \tag{4.29}$$

Damit ergibt sich aus Glg. (4.26) die Beschleunigung in physikalischen Komponenten

⁴kovarianter Metrikoeffizient:

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta ,$$

$$\begin{aligned}
{}^*\mathbf{a}^F &= \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} v_r - \frac{1}{r} v_\varphi^2 \right) \mathbf{g}_1 \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) v_r + 2 \frac{1}{r^2} v_\varphi v_r \right) \mathbf{g}_2 .
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Anwendung der Produktregel liefert

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) &= v_\varphi \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \\
&= -\frac{1}{r^2} v_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} .
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Damit können wir Glg. (4.30) vereinfachen

$${}^*\mathbf{a}^F = \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} v_r - \frac{1}{r} v_\varphi^2 \right) \mathbf{g}_1 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} v_r + \frac{1}{r^2} v_\varphi v_r \right) \mathbf{g}_2 . \tag{4.32}$$

Um auf die Bilanzgleichung zurückgehen zu können, benötigen wir noch ${}^*\mathbf{b}^F$.

Mit $\mathbf{b}^F \equiv 0$ können wir die Glgn. der Tabelle auf S. 31 umformen und erhalten

$${}^*\mathbf{b}^F = 2\mathbf{W}^* \mathbf{v}^F - (\mathbf{W}^2 - \underbrace{\dot{\mathbf{W}}}_0) {}^*\mathbf{x} . \tag{4.33}$$

Einsetzen von Glg. (2.87) und Glg.(2.88) ergibt

$$\begin{aligned}
{}^*\mathbf{b}^F &= \left[-2\omega \frac{1}{r} (\mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_1) \right] {}^*\mathbf{v}^F \\
&\quad + \omega^2 (\mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 + \frac{1}{r^2} \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_2) {}^*\mathbf{x} .
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Wir fassen zusammen

$${}^*\mathbf{b}^F = -\frac{2\omega}{r} (\mathbf{g}_1 {}^*v_2^F - \mathbf{g}_2 {}^*v_1^F) + \omega^2 (\mathbf{g}_1 r) . \tag{4.35}$$

Damit wird die Bilanzgleichung umgeformt

$$\begin{aligned}
\stackrel{\text{Impuls}}{\implies} \quad \rho^F \left\{ \left(\frac{dv_r}{dr} v_r - \frac{1}{r} v_\varphi^2 \right) \mathbf{g}_1 + \left(\frac{dv_\varphi}{dr} + \frac{1}{r} v_\varphi \right) \frac{1}{r} v_r \mathbf{g}_2 \right\} = \\
= -\frac{dp^F}{dr} \mathbf{g}_1 - \Pi v_r \mathbf{g}_1 - \Pi \frac{1}{r} v_\varphi \mathbf{g}_2 \\
-\rho^F \left(\frac{2\omega}{r} r v_\varphi - \omega^2 r \right) \mathbf{g}_1 + \rho^F \frac{2\omega}{r} v_r \mathbf{g}_2 ,
\end{aligned} \tag{4.36}$$

wobei $*v_\alpha^F$ durch v_r ersetzt wurde, da die Flüssigkeit aufgrund der Stabilisierung des Skeletts die einzige radiale Geschwindigkeitskomponente darstellt.

Wir trennen nun die Komponenten der obigen vektoriellen Gleichung

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_1 : \quad \rho^F \left(\frac{dv_r}{dr} v_r - \frac{1}{r} v_\varphi^2 \right) &= -\frac{dp^F}{dr} - \Pi v_r + \rho^F (\omega^2 r - 2\omega v_\varphi) , \\
\mathbf{g}_2 : \quad \rho^F \left(\frac{dv_\varphi}{dr} + \frac{1}{r} v_\varphi \right) \frac{1}{r} v_r &= -\Pi \frac{1}{r} v_\varphi + \rho^F \frac{2\omega}{r} v_r .
\end{aligned}$$

Wenden wir uns zunächst der zweiten Gleichung zu.

Kürzen von $\frac{1}{r}$ und Division durch ρ^F liefert

$$v_r \frac{dv_\varphi}{dr} + \frac{1}{r} v_\varphi v_r = -\frac{\Pi}{\rho^F} v_\varphi + 2\omega v_r . \tag{4.37}$$

Betrachten wir die Größenordnungen der einzelnen Terme, um etwas über v_φ zu erfahren.

Aus Kapitel 3.6.4 ist bekannt, daß $\Pi \approx 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \text{s}}$. Außerdem wissen wir, daß $\rho^{FR} \cong 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Unter Berücksichtigung der Porosität erhalten wir $\rho^F \cong \frac{1}{4} \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Damit hat der Term $\frac{\Pi}{\rho^F}$ die Größenordnung $10^5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \text{s}} \cdot 4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} = 4 \cdot 10^2 \frac{1}{\text{s}}$.

Unter der Annahme, daß $\omega \sim 1 \frac{1}{\text{s}}$ und $v_r \sim 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, ergibt sich für ωv_r ein Wert von ungefähr $1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Mit dem Ansatz $v_\varphi \ll v_r$ würde der Ausdruck $\frac{dv_\varphi}{dr}$ eine immense Änderung von v_φ in radialer Richtung bedeuten, wenn er die Größenordnung der Terme auf der rechten Seite erreichen sollte. Außerdem wäre der Ausdruck $\frac{1}{r} v_\varphi v_r$ von kleiner Ordnung. Deshalb können wir hier die linke Seite vernachlässigen. Wir überprüfen

diesen Schritt noch einmal, indem wir mit der verbliebenen rechten Seite der Gleichung die Größenordnung von v_φ bestimmen

$$v_\varphi \sim -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 10^{-2} \text{s} = -\frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (4.38)$$

Dieses Ergebnis bestätigt unseren Ansatz. Allerdings kann man sich vorstellen, daß z.B. bei Ultrazentrifugen, die für die Kernspaltung verwendet werden und in denen die Winkelgeschwindigkeit wesentlich höher ist, ein solcher Ansatz nicht möglich ist. Für unseren Fall können wir mit der Abschätzung sogar eine Näherung für v_φ angeben

$$v_\varphi \cong \frac{2\omega\rho^F}{\Pi} v_r. \quad (4.39)$$

Hier wird jetzt deutlich, daß v_φ diejenige Geschwindigkeit darstellt, die mit der **Corioliskraft** verbunden ist.

Auch die andere Komponente des Impulssatzes soll nun untersucht werden. Dazu teilen wir die Komponentengleichung für \mathbf{g}_1 durch ρ^F

$$\underbrace{v_r \frac{dv_r}{dr}}_{\approx 0} - \underbrace{\frac{1}{r} v_\varphi^2}_{\approx 0} = -\frac{1}{\rho^F} \frac{dp^F}{dr} - \frac{\Pi}{\rho^F} v_r + \omega^2 r - 2\omega v_\varphi. \quad (4.40)$$

Unter Berücksichtigung der Feststellungen für die zweite Komponente kann auch hier wieder die linke Seite vernachlässigt werden. Dadurch ergibt sich, wenn wir die Näherung für v_φ einsetzen

$$-\frac{1}{\rho^F} \frac{dp^F}{dr} + \omega^2 r - \frac{\Pi}{\rho^F} v_r \left(1 + \frac{4\omega^2 \rho^{F2}}{\Pi^2} \right) = 0. \quad (4.41)$$

Es stellt sich jetzt die Frage, wie groß der Bruchterm in der Klammer, der den Einfluß der Corioliskraft beschreibt, im Vergleich zu 1 ist. Deshalb wieder ein Einsetzen der abgeschätzten Größen.

Als Größenordnung erhalten wir $\cong \frac{4 \cdot 1 \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{16} \cdot 10^6 \frac{\text{kg}^2}{\text{m}^6}}{10^{10} \frac{\text{kg}^2}{\text{m}^6 \text{s}^2}} = \frac{1}{4} \cdot 10^{-4}$, also eine vernachlässigbar kleine Größe. Damit und durch Multiplikation mit ρ^F erhalten wir aus (4.41) eine Gleichung der Gestalt

$$\boxed{\frac{dp^F}{dr} = -\Pi v_r + \rho^F \omega^2 r .} \quad (4.42)$$

Um diese Gleichung weiter zu nutzen, definieren wir die im Stoffgesetz für die Flüssigkeit enthaltene Konstante als

$$\beta := \frac{1}{\kappa^F \rho_0^F} + \frac{\gamma n_0}{\tau \mathcal{N}} . \quad (4.43)$$

Das Stoffgesetz vereinfacht sich dann folgendermaßen

$$p^F = p_0^F + \beta(\rho^F - \rho_0^F) . \quad (4.44)$$

Durch Differentiation nach r ergibt sich daraus

$$\frac{dp^F}{dr} = \beta \frac{d\rho^F}{dr} . \quad (4.45)$$

Setzt man dies und die nach v_r aufgelöste Glg. (4.18) in die Beziehung (4.42) ein, so ist das Ergebnis eine nichtlineare Gleichung für ρ^F

$$\boxed{\beta \frac{d\rho^F}{dr} = -\Pi \frac{\mathcal{A}}{r \rho^F} + \rho^F \omega^2 r .} \quad (4.46)$$

Wir wollen diese Gleichung nun linearisieren. Dazu versuchen wir zunächst, eine Näherung für $\frac{1}{\rho^F}$ zu finden. Durch Einschalten eines Nullterms ergibt sich

$$\frac{1}{\rho^F} = \frac{1}{\rho^F - \rho_0^F + \rho_0^F} , \quad (4.47)$$

was wir durch Normierung ersetzen können mit

$$\frac{1}{\rho^F} = \frac{1}{\rho_0^F} \frac{1}{1 + \frac{\rho^F - \rho_0^F}{\rho_0^F}}. \quad (4.48)$$

Jetzt ist die Änderung der Massendichte in dem Term vorhanden. Hierfür können wir wieder das erste Glied einer Taylor-Reihenentwicklung⁵ benutzen und erhalten

$$\frac{1}{\rho^F} \cong \frac{1}{\rho_0^F} \left(1 - \frac{\rho^F - \rho_0^F}{\rho_0^F} \right) = \frac{1}{\rho_0^F} \left(1 - \frac{\rho^F}{\rho_0^F} + 1 \right) = \frac{1}{\rho_0^F} \left(2 - \frac{\rho^F}{\rho_0^F} \right). \quad (4.49)$$

Damit haben wir eine lineare Gleichung für ρ^F gefunden, die wir nun in Glg. (4.46) einsetzen

$$\implies \beta \frac{d\rho^F}{dr} = -\frac{\Pi \mathcal{A}}{r} \frac{1}{\rho_0^F} \left(2 - \frac{\rho^F}{\rho_0^F} \right) + \rho^F \omega^2 r. \quad (4.50)$$

Zusammengefaßt wird daraus

$$\beta \frac{d\rho^F}{dr} = -\frac{2\Pi \mathcal{A}}{r \rho_0^F} + \rho^F \left(\omega^2 r + \frac{\Pi \mathcal{A}}{r \rho_0^{F2}} \right), \quad (4.51)$$

und schließlich nach Umstellung und Division durch β

$$\boxed{\frac{d\rho^F}{dr} - \left(\frac{\omega^2}{\beta} r + \frac{\Pi \mathcal{A}}{r \rho_0^{F2} \beta} \right) \rho^F = -\frac{2\Pi \mathcal{A}}{\rho_0^F \beta} \frac{1}{r}}. \quad (4.52)$$

Dies ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung⁶ mit einer Heterogenität auf der rechten Seite und stellt eine zweite Bestimmungsgleichung für die Ergiebigkeit der Zentrifuge dar.

⁵Taylor-Reihenentwicklung für $|\varepsilon| \ll 1$ um $\varepsilon_0 = 0$:

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} \approx 1 + \left(-\frac{1}{(1 + \varepsilon_0)^2} \right) \Big|_{\varepsilon_0=0} \varepsilon + \dots \cong 1 - \varepsilon$$

⁶Allgemeine Form der gewöhnlichen DGL:

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x)$$

4.5 Lösung der DGL

Die eben gefundene DGL muß nun gelöst werden. Dazu suchen wir zur Vereinfachung eine Darstellung ohne physikalische Einheiten. Wir ersetzen deshalb

$$x := \frac{r}{R_a} \leq 1, \quad (4.53)$$

und erhalten nach Multiplikation mit R_a

$$\frac{d\rho^F}{dx} - \left(\frac{\omega^2 R_a^2}{\beta} x + \frac{\Pi \mathcal{A}}{\rho_0^F \beta} \frac{1}{x} \right) \rho^F = -\frac{2\Pi \mathcal{A}}{\rho_0^F \beta} \frac{1}{x}. \quad (4.54)$$

Außerdem wird definiert

$$y := \frac{\beta(\rho^F - \rho_0^F)}{p_0^F} \quad \Longrightarrow \quad \rho^F = \frac{y p_0^F}{\beta} + \rho_0^F, \quad (4.55)$$

und eingesetzt

$$\frac{d \frac{y p_0^F}{\beta}}{dx} + \underbrace{\frac{d\rho_0^F}{dx}}_0 - \left(\frac{\omega^2 R_a^2}{\beta} x + \frac{\Pi \mathcal{A}}{\rho_0^F \beta} \frac{1}{x} \right) \left(\frac{y p_0^F}{\beta} + \rho_0^F \right) = -\frac{2\Pi \mathcal{A}}{\rho_0^F \beta} \frac{1}{x}. \quad (4.56)$$

Diese Definition der unbekanntenen Funktion ist zusätzlich auch rein mathematisch motiviert. Die Änderung der Massendichte ρ^F in Glg. (4.52) ist nämlich wegen der geringen Kompressibilität der flüssigen Komponente sehr klein. Dadurch führt die numerische Auswertung der Lösung zu einer Multiplikation von sehr kleinen mit sehr großen Zahlen. Dies beeinträchtigt die Genauigkeit der Ergebnisse. Die neue Variable y ändert sich genauso wie der Druck p^F , d.h. die führenden Glieder in der Lösung sind von der Größenordnung 1 und die Ergebnisse können wesentlich genauer ausgewertet werden.

Nach Multiplikation von Glg. (4.56) mit $\frac{\beta}{p_0^F}$ ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} - \left(\frac{\omega^2 R_a^2}{\beta} x + \frac{\Pi \mathcal{A}}{\rho_0^{F^2} \beta} \frac{1}{x} \right) y - \left(\frac{\omega^2 R_a^2 \rho_0^F}{p_0^F} x + \frac{\Pi \mathcal{A}}{\rho_0^F p_0^F} \frac{1}{x} \right) = -\frac{2\Pi \mathcal{A}}{p_0^F \rho_0^F} \frac{1}{x}, \quad (4.57)$$

und vereinfacht

$$\boxed{\frac{dy}{dx} - \left(\frac{\omega^2 R_a^2}{\beta} x + \frac{\Pi \mathcal{A}}{\rho_0^{F^2} \beta} \frac{1}{x} \right) y - \left(\frac{\omega^2 R_a^2 \rho_0^F}{p_0^F} x - \frac{\Pi \mathcal{A}}{p_0^F \rho_0^F} \frac{1}{x} \right) = 0.} \quad (4.58)$$

Zunächst wird eine Lösung y_0 für die homogene Dgl

$$\frac{dy_0}{dx} - \left(\frac{\omega^2 R_a^2}{\beta} x + \frac{\Pi \mathcal{A}}{\rho_0^{F^2} \beta} \frac{1}{x} \right) y_0 = 0, \quad (4.59)$$

gesucht. Der erste Schritt dazu ist die Division durch y_0 und Multiplikation mit dx

$$\frac{dy_0}{y_0} = \left(\frac{\omega^2 R_a^2}{\beta} x + \frac{\Pi \mathcal{A}}{\rho_0^{F^2} \beta} \frac{1}{x} \right) dx, \quad (4.60)$$

Durch Integration entsteht

$$\ln y_0 - \ln B = \frac{\omega^2 R_a^2}{2\beta} x^2 + \frac{\Pi \mathcal{A}}{\rho_0^{F^2} \beta} \ln x. \quad (4.61)$$

Dabei haben wir die Konstante $-\ln B$ addiert, die zur Lösung der allgemeinen Gleichung nützlich sein wird.

Nun wird die Exponentialfunktion angewendet

$$y_0 = B \exp \left\{ \frac{\omega^2 R_a^2}{2\beta} x^2 + \frac{\Pi \mathcal{A}}{\rho_0^{F^2} \beta} \ln x \right\}. \quad (4.62)$$

Diesen Ausdruck kann man auch als Produkt schreiben

$$y_0 = B \exp \left\{ \frac{\omega^2 R_a^2}{2\beta} x^2 \right\} \exp \left\{ \ln x \frac{\Pi \mathcal{A}}{\rho_0^{F^2} \beta} \right\}, \quad (4.63)$$

und es ergibt sich die homogene Lösung

$$y_0 = B x^{\frac{\Pi A}{F^2 \beta}} \exp \left\{ \frac{\omega^2 R_a^2}{2\beta} x^2 \right\}. \quad (4.64)$$

Wir suchen jetzt nach einer Lösung für die allgemeine Gleichung, indem wir B als Funktion von x annehmen

$$y = B(x) x^{\frac{\Pi A}{F^2 \beta}} \exp \left(\frac{\omega^2 R_a^2}{2\beta} x^2 \right). \quad (4.65)$$

Nun muß man B so wählen, daß die heterogene Gleichung erfüllt wird. Zunächst differenzieren wir

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = & \frac{dB}{dx} x^{\frac{\Pi A}{F^2 \beta}} \exp \left(\frac{\omega^2 R_a^2}{2\beta} x^2 \right) + \\ & + B \left\{ \frac{\Pi A}{\rho_0^{F^2} \beta} x^{\frac{\Pi A}{F^2 \beta} - 1} \exp \left(\frac{\omega^2 R_a^2}{2\beta} x^2 \right) + \right. \\ & \left. + x^{\frac{\Pi A}{F^2 \beta}} \cdot 2 \frac{\omega^2 R_a^2}{2\beta} x \exp \left(\frac{\omega^2 R_a^2}{2\beta} x^2 \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.66)$$

und isolieren dann in dieser Gleichung y_0

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = & \frac{dB}{dx} x^{\frac{\Pi A}{F^2 \beta}} \exp \left(\frac{\omega^2 R_a^2}{2\beta} x^2 \right) + \\ & + \underbrace{B x^{\frac{\Pi A}{F^2 \beta}} \exp \left(\frac{\omega^2 R_a^2}{2\beta} x^2 \right)}_y \left\{ \frac{\Pi A}{\rho_0^{F^2} \beta} \frac{1}{x} + \frac{\omega^2 R_a^2}{\beta} x \right\}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Ein Vergleich mit Glg. (4.58) führt weiter. Eingesetzt in diese Gleichung und gekürzt erhält man nämlich

$$\frac{dB}{dx} x^{\frac{\Pi A}{F^2 \beta}} \exp \left(\frac{\omega^2 R_a^2}{2\beta} x^2 \right) = \frac{\omega^2 R_a^2 \rho_0^{F^2}}{p_0^F} x - \frac{\Pi A}{\rho_0^{F^2} \beta} \frac{1}{x}. \quad (4.68)$$

Nach $\frac{dB}{dx}$ umgestellt ergibt sich

$$\frac{dB}{dx} = x^{-\frac{\Pi\mathcal{A}}{\rho_0^{F^2}\beta}} \exp\left(-\frac{\omega^2 R_a^2}{2\beta} x^2\right) \left(\frac{\omega^2 R_a^2 \rho_0^{F^2}}{p_0^F} x - \frac{\Pi\mathcal{A}}{\rho_0^{F^2}\beta} \frac{1}{x}\right). \quad (4.69)$$

Wir wollen jetzt zeigen, daß die Terme $x^{-\frac{\Pi\mathcal{A}}{\rho_0^{F^2}\beta}}$ und $\exp\left(-\frac{\omega^2 R_a^2}{2\beta} x^2\right)$ nahezu gleich 1 sind. Dann ergibt sich nämlich aus Glg. (4.69) die Beziehung

$$\frac{dB}{dx} = \frac{\omega^2 R_a^2 \rho_0^{F^2}}{p_0^F} x - \frac{\Pi\mathcal{A}}{\rho_0^{F^2}\beta} \frac{1}{x}, \quad (4.70)$$

die leicht analytisch lösbar ist.

Zunächst gehen wir auf die Größenordnung von $\exp\left(-\frac{\omega^2 R_a^2}{2\beta} x^2\right)$ ein. Mit Größenordnungen von $\omega = 1 \frac{1}{s}$, $R_a = 1\text{m}$, $0 \leq x \leq 1$ und $\beta \approx 10^7 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$, hat der Klammerterm etwa den Wert $-\frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 10^7} = 0,5 \cdot 10^{-7}$. Der Exponent einer so kleinen Zahl ist nahezu genau 1. Um etwas über den zweiten Ausdruck aussagen zu können, benutzen wir die erste Bestimmungsgleichung für \mathcal{A} Glg. (4.18)

$$\mathcal{A} \cong r \rho^F v^F, \quad (4.71)$$

und erhalten als Größenordnung für \mathcal{A}

$$\mathcal{A} \approx 1\text{m} \cdot 0,23 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 10^2 \frac{\text{kg}}{\text{m s}}. \quad (4.72)$$

Damit ergibt sich für den zweiten Ausdruck

$$x^{-\frac{\Pi\mathcal{A}}{\rho_0^{F^2}\beta}} \approx x^{\frac{10^5 \cdot 10^2}{10^6 \cdot 10^7}} = x^{10^{-6}} \approx 1. \quad (4.73)$$

Die Terme sind offensichtlich nahezu gleich 1. Es gilt jetzt also zu lösen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 R_a^2 \rho_0^F}{p_0^F} x - \frac{\Pi\mathcal{A}}{\rho_0^F p_0^F} \frac{1}{x}, \quad (4.74)$$

Integration liefert

$$y = B_0 + \frac{\omega^2 R_a^2 \rho_0^F}{2p_0^F} x^2 - \frac{\Pi \mathcal{A}}{\rho_0^F p_0^F} \ln x. \quad (4.75)$$

Dies können wir jetzt auf die physikalischen Variablen zurücktransformieren. Dann ergibt sich unter Berücksichtigung der Transformationsregeln

$$\boxed{\frac{p^F - p_0^F}{p_0^F} = B_0 + \frac{\omega^2 R_a^2 \rho_0^F}{2p_0^F} \left(\frac{r}{R_a}\right)^2 - \frac{\Pi \mathcal{A}}{\rho_0^F p_0^F} \ln\left(\frac{r}{R_a}\right)}. \quad (4.76)$$

In dieser Gleichung sind die zwei Konstanten B_0 und A unbekannt. Das weitere Vorgehen wird also die Bestimmung dieser Konstanten sein.

4.6 Randbedingungen

Wir benötigen dazu Randbedingungen. Um sie aufstellen zu können, ist die Frage zu klären, welcher der beiden folgenden Grenzfälle für die Lastverteilung auf die Komponenten für die Beschreibung der Situation in der Zentrifuge geeignet ist.

1. Modell von Terzaghi

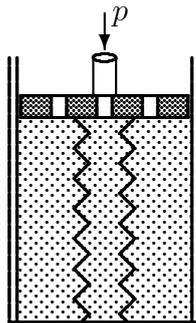


Abb. 4.3 Modell von Terzaghi

In diesem Modell übernimmt das Wasser unmittelbar nach Aufbringen der Last zunächst die gesamte Auflast. Erst mit dem Abfließen des Wassers durch die Poren wird die Auflast nach und nach an die Federn (also das Skelett) abgegeben. Dies geschieht im allgemeinen so langsam, daß das System

eine kontinuierliche Folge von Gleichgewichtsprozessen durchläuft, man kann also die Beschleunigung vernachlässigen. Solche nicht-stationären Vorgänge nennt man quasi-statisch.

Tragen wir den Druck in der Flüssigkeit p^F abhängig von der Zeit auf, so wird deutlich, daß hier nur eine Randbedingung entsteht.

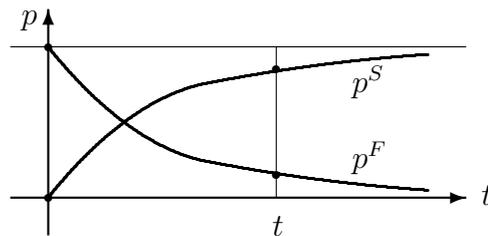


Abb. 4.4 Quasi-statische Vorgänge

Es muß nämlich zu jeder Zeit t gelten

$$p^S(t) + p^F(t) = p. \tag{4.77}$$

2. Modell für den statischen Fall

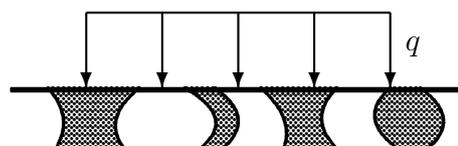


Abb. 4.5 Modell für den statischen Fall

Im stationären Fall findet keine Ausfuhr statt, d.h. es gibt weder zeitliche noch örtliche Veränderung.

Verlangt man, daß ein Körper statistisch (nicht regelmäßig) verteilt⁷ ist, so kann man näherungsweise die Flächenporosität mit der Volumenporosität gleichsetzen und es gilt für die Belastung q

$$\begin{aligned} p^F &= nq, \\ p^S &= (1-n)q. \end{aligned} \tag{4.78}$$

D.h., die Verteilung der Last auf Skelett und Fluid ist proportional zur Porosität.

Wegen der Zeitunabhängigkeit im nicht-inertialen Bezugssystem und der statistischen Verteilung des Körpers in der Zentrifuge, sind die Randbedingungen in unserem Fall **statisch**. Es finden keine Relaxationen wie im Terzaghi-Modell statt. Wir können dann für die Zentrifuge die folgenden Randbedingungen angeben

$$\begin{cases} p^F(r = R_a) = n(r = R_a)p_a, \\ p^F(r = R_i) = n(r = R_i)p_i, \end{cases} \tag{4.79}$$

mit

$$n(r = R_a) \approx n(r = R_i) = n_0, \tag{4.80}$$

⁷Bsp.: Dieser Würfel ist nicht statistisch verteilt.

Flächenporosität (obere Fläche):

$$n_{A_{oben}} = \frac{1\text{cm} \cdot 3\text{cm}}{3\text{cm} \cdot 3\text{cm}} = \frac{3}{9}$$

Volumenporosität:

$$n_V = \frac{5 \cdot 1\text{cm}^2 \cdot 3\text{cm}}{3 \cdot 3 \cdot 3\text{cm}^3} = \frac{5}{9}$$

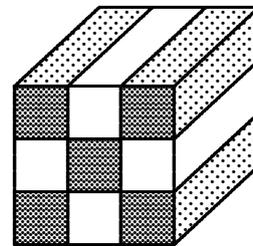


Abb. 4.6 Würfel

wobei wir den Außendruck p_a atmosphärisch annehmen.

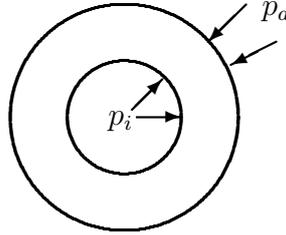


Abb. 4.7 Druckverhältnisse

4.7 Einsetzen der Randbedingungen

Unser Ziel ist nun die Eliminierung von B_0 aus Glg. (4.83). Wir haben dazu Randbedingungen für $r = R_a$ und $r = R_i$ zur Verfügung. Nach Einsetzen der Randbedingungen erhalten wir das folgende Gleichungssystem mit zwei Gleichungen für die zwei Unbekannten B_0 und \mathcal{A}

$$\begin{aligned} \underline{r = R_a}: \quad \frac{p_a^F}{p_0^F} - 1 &= B_0 + \frac{\omega^2 R_a^2 \rho_0^F}{2p_0^F}, \\ \underline{r = R_i}: \quad \frac{p_i^F}{p_0^F} - 1 &= B_0 + \frac{\omega^2 R_a^2 \rho_0^F}{2p_0^F} \left(\frac{R_i}{R_a}\right)^2 - \frac{\Pi \mathcal{A}}{\rho_0^F p_0^F} \ln\left(\frac{R_i}{R_a}\right). \end{aligned} \quad (4.81)$$

Durch Subtraktion und anschließendes Kürzen von p_0^F entsteht die gesuchte Gleichung für \mathcal{A}

$$\boxed{p_a^F - p_i^F = \frac{1}{2} \omega^2 R_a^2 \rho_0^F \left[1 - \left(\frac{R_i}{R_a}\right)^2 \right] + \frac{\Pi \mathcal{A}}{\rho_0^F} \ln\left(\frac{R_i}{R_a}\right)}, \quad (4.82)$$

die auch nach \mathcal{A} aufgelöst werden kann

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{\left\{ p_a^F - p_i^F - \frac{1}{2} \omega^2 R_a^2 \rho_0^F \left[1 - \left(\frac{R_i}{R_a}\right)^2 \right] \right\} \cdot \rho_0^F}{\Pi \ln\left(\frac{R_i}{R_a}\right)}}. \quad (4.83)$$

Mithilfe dieser Gleichungen soll nun eine Parameterstudie durchgeführt werden.

Kapitel 5

Parameterstudie

Anhand der Gleichungen aus Kapitel 4 wollen wir nun eine Parameterstudie durchführen. D.h., wir setzen verschiedene Werte für die Konstanten ein, lassen beispielsweise Drehgeschwindigkeit oder Druckdifferenz variabel und rechnen dafür die Ergiebigkeit $\frac{\mathcal{A}}{R_a}$ aus.

Dabei beziehen wir uns auf die im Aufsatz von Wilmanski „Acceleration waves in two-component porous media“ [13] angegebenen Größenangaben für die Parameter. Der dort benutzte Wert für die Porosität von 23 % ist auch in unserem Fall sicherlich brauchbar. Da uns für andere Porositäten keine Ergebnisse zur Verfügung stehen, werden wir hier die dort gefundenen Ergebnisse übernehmen.

Um herauszufinden, welche Untersuchungen von Interesse sind, müssen wir uns zunächst überlegen, wodurch die Bewegung in der Zentrifuge zustandekommt.

Es ist offensichtlich, daß eine Bewegung nur dann stattfindet, wenn die Drehgeschwindigkeit ω ungleich Null ist oder wenn eine Druckdifferenz zwischen Innen- und Außendruck auftritt (oder die Kombination von beidem).

Dies ist auch leicht an Glg. (4.89) zu sehen

$$p_a^F - p_i^F = \frac{1}{2} \omega^2 R_a^2 \rho_0^F \left[1 - \left(\frac{R_i}{R_a} \right)^2 \right] + \frac{\Pi \mathcal{A}}{\rho_0^F} \ln \left(\frac{R_i}{R_a} \right). \quad (5.1)$$

Man sieht hier sofort, daß die Ergiebigkeit $\frac{\mathcal{A}}{R_a}$ außer von Drehgeschwindigkeit und

Druckdifferenz nur von Konstanten abhängt. Wir betrachten also eine Gleichung der Form

$$\begin{aligned} \Delta p - \mu \omega^2 &= \nu A, \quad \text{mit} \quad \Delta p := p_a^F - p_i^F, \\ \mu &:= \frac{1}{2} R_a^2 \rho_0^F \left[1 - \left(\frac{R_i}{R_a} \right)^2 \right], \\ \nu &:= \frac{\Pi}{\rho_0^F} \ln \left(\frac{R_i}{R_a} \right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Wir wollen nun einige Fälle betrachten, um herauszufinden, welchen Einfluß es auf die Ergiebigkeit hat, wenn sich diese beiden Größen ändern.

Dazu setzen wir die folgenden Werte ein:

Außenradius: $R_a = 1 \text{ m}$,

Innenradius: $R_i = 0,5 \text{ m}$,

Massendichte: $\rho_0^F = 0,23 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Kehrwert der Durchlässigkeit: $\Pi = 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}}$ (siehe S. 61)

1. Fall: $\omega = 0$

In diesem Fall ist die Bewegung nur abhängig von der Druckdifferenz $p_a^F - p_i^F$. Die Ergiebigkeit der Zentrifuge ist damit eine lineare Funktion der Druckdifferenz.

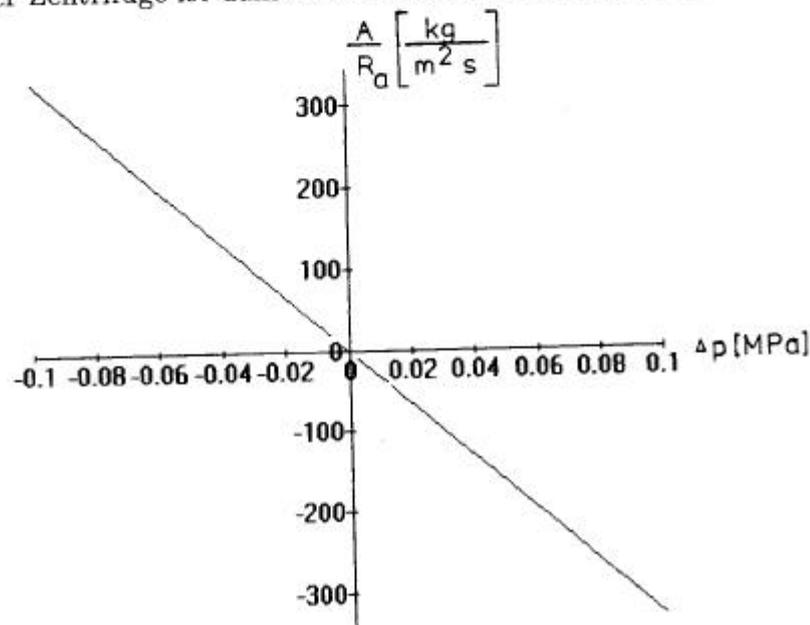


Abb. 5.1 Ergiebigkeit in Abhängigkeit von Druckdifferenz

Tritt zusätzlich der Fall ein, daß $p_a = p_i$, so ist die Ergiebigkeit gleich Null. Ansonsten verdeutlicht Abb. 5.1, daß das Wasser nach außen fließt, wenn der Druck innen größer ist, aber nach innen fließt, wenn der Druck außen höher ist.

Diesen Fall kann man sich bei einer Zentrifuge, in die das Wasser von innen eingelassen wird, natürlich nur vorstellen, wenn die Zentrifuge aus einer Drehung mit $\omega \neq 0$ angehalten wird.

2. Fall: $p_a = p_i \implies \Delta p = 0$

In diesem Sonderfall hängt die Bewegung nur von der Drehgeschwindigkeit ab. Und zwar ist die Ergiebigkeit proportional zu ω^2 . D.h., es ergibt sich eine quadratische Parabel.

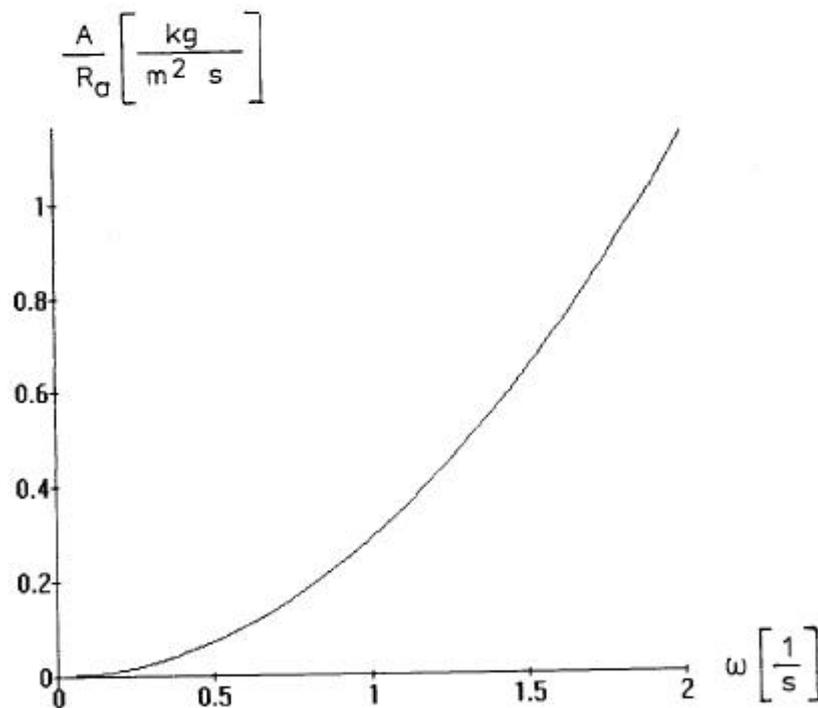


Abb. 5.2 Ergiebigkeit in Abhängigkeit von Drehgeschwindigkeit

Wir können hier noch untersuchen, welchen Einfluß die Durchlässigkeit des porösen Körpers auf die Ergiebigkeit hat und setzen Werte zwischen 10^4 und $10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \text{ s}}$ für den Kehrwert der Durchlässigkeit Π ein. Dann ergeben sich folgende Graphen:

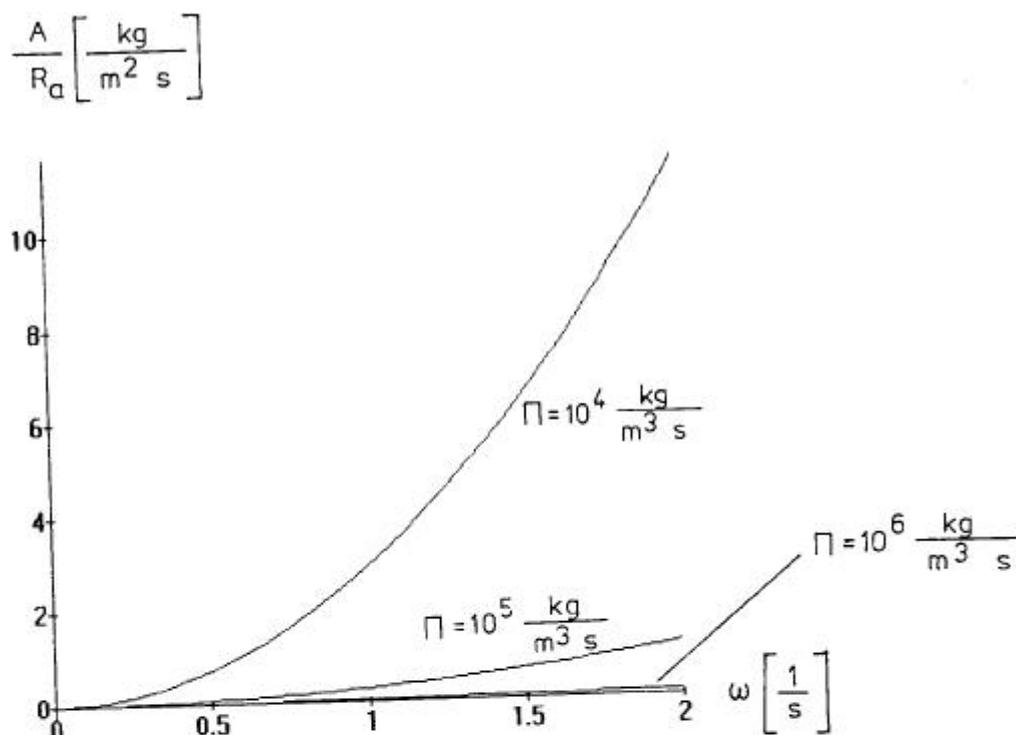


Abb. 5.3 Ergiebigkeit in Abhängigkeit von Drehgeschwindigkeit für verschiedene Durchlässigkeiten

Es fällt auf, daß die Parabeln durch das Einsetzen verschiedener Durchlässigkeiten (hier werden die Kehrwerte der Durchlässigkeiten eingesetzt) sehr stark gestreckt (kleines Π , also große Durchlässigkeit) oder gestaucht (großes Π , also kleine Durchlässigkeit) werden. Ab einer Größenordnung von $\Pi = 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \text{ s}}$ ist die Ergiebigkeit nahezu Null.

Die Tatsache, daß also Π einen großen Einfluß auf die Ergiebigkeit hat, bringt uns auf die Idee, die Ergiebigkeit für verschiedene Drehgeschwindigkeiten in Abhängigkeit von der Durchlässigkeit darzustellen.

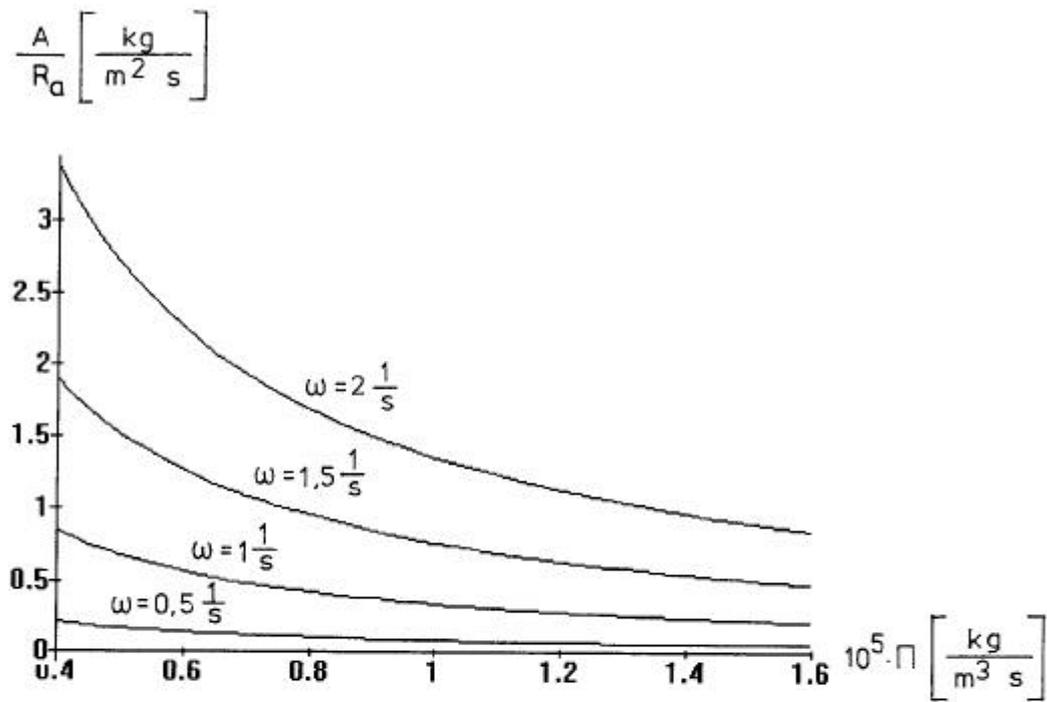


Abb. 5.4 Ergiebigkeit in Abhängigkeit von Durchlässigkeit für verschiedene Drehgeschwindigkeiten

Die entstehenden Kurven haben die Gestalt von Hyperbeln. Für größer werdende Drehgeschwindigkeiten wird auch die Ergiebigkeit größer.

3. Fall: ω , Δp

Für verschiedene ω ergeben sich entsprechend Geraden mit gleicher Steigung und unterschiedlichen Nulldurchgängen.

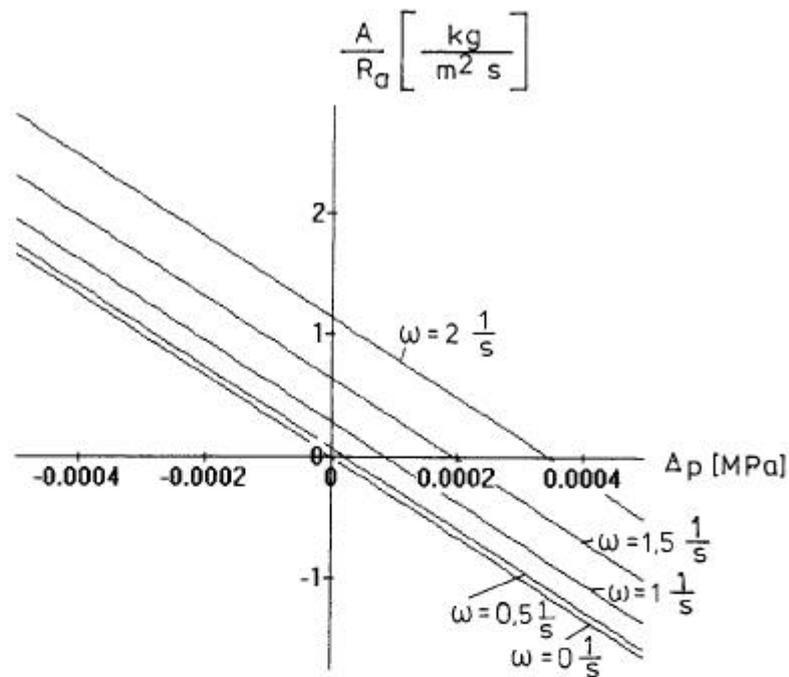


Abb. 5.5 Ergiebigkeit in Abhängigkeit von Druckdifferenz für verschiedene Drehgeschwindigkeiten

Zu beachten ist hier, daß nur Winkelgeschwindigkeiten um $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sinnvoll sind, da wir einen Ansatz gewählt haben, der die Beschleunigung vernachlässigt und somit höhere Geschwindigkeiten nicht zuläßt.

4. Fall: $\Pi = 0$

Für $\Pi = 0$ ist Glg. (4.83) nicht definiert. Ohnehin wird hier aber die Beschleunigung so groß, daß sie nicht mehr vernachlässigbar ist, wie dies in unserem Ansatz getan wurde.

5. Fall: $\Pi \rightarrow \infty$

Für $\Pi \rightarrow \infty$ ist das poröse Material nicht durchlässig. Es ist offensichtlich, daß ohne Durchlässigkeit $v_r \equiv 0$ und damit ist auch die Ergiebigkeit gleich Null.

Kapitel 6

Schlußbemerkung

Das Ziel dieser Arbeit, die Ergiebigkeit einer Zentrifuge aus porösem Material in Abhängigkeit von Drehgeschwindigkeit und Durchlässigkeit zu bestimmen, wurde erreicht.

Die Theorie zweikomponentiger Körper wurde dazu benutzt, ein Modell für eine solche Zentrifuge, bestehend aus Skelett und Flüssigkeit, zu entwickeln.

Um die Vorgänge in dieser Zentrifuge zu beschreiben, war es sinnvoll, die allgemeinen Bewegungsgleichungen in ein nicht-inertiales Bezugssystem zu transformieren.

Mithilfe der in ein nicht-inertiales Bezugssystem transformierten Erhaltungssätze war es möglich, eine Bestimmungsgleichung für die Ergiebigkeit zu entwickeln.

Die gefundene Differentialgleichung konnte durch Streichen von Anteilen, die keinen Einfluß auf die Lösung haben, derart vereinfacht werden, daß sich eine analytisch lösbare Gleichung ergab.

In der Parameterstudie wurden dann die Zusammenhänge zwischen Ergiebigkeit, Drehgeschwindigkeit und Durchlässigkeit aufgezeigt und anhand von Graphen dargestellt.

Die Ergebnisse dieser Arbeit sind nicht nur für technische Zentrifugen von Bedeutung. Sie können auch als Grundlage dienen, um ein Gerät zu entwickeln, das in Laboranlagen zur Untersuchung der Durchlässigkeit von porösen Materialien

benutzt werden könnte. Als Vergleich hierzu sei das bekannte Maxwell-Rheometer zur Bestimmung der Zähigkeit von nicht-newtonischen Flüssigkeiten genannt.

Literaturverzeichnis

1. E. Becker, W. Bürger, Kontinuumsmechanik, Verlag B.G. Teubner, Stuttgart 1975.
2. R. de Boer, H. Prediger, Tensorrechnung, Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen, Universität-GH Essen, 1978.
3. I. Bronstein, K. Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik, Leipzig, Teubner, 1987.
4. B. Chamsaz, Einige quasistatische Probleme ebener Verzerrungen bei kompressiblen porösen Körpern, Diplomarbeit Nr. 95/3, Institut für Mechanik, Universität GH-Essen, 1995.
5. D. Halliday, R. Resnick, Physik Teil 1, Verlag de Gruyter, Berlin, New York, 1993.
6. W. Kempa, Das Grenzwertproblem bei Konsolidation – eine konsistente Konstruktion der schwachen Formulierung, MECH – Bericht 95/13, Universität GH-Essen, 1995.
7. W. Kiesewetter, Untersuchungen über eine neuartige Klär-Filter-Zentrifuge, Dissertation, Universität Stuttgart(TH), 1982.
8. E. Klingbeil, Tensorrechnung für Ingenieure, BI-Wiss.-Verl. Mannheim, Wien, Zürich, 1989.
9. H. Leipholz, Einführung in die Elastizitätstheorie, Verlag G. Braun, Karlsruhe 1968.

10. G. Ludwig, Einführung in die Grundlagen der Theoretischen Physik, Bertelsmann Universitätsverlag, Düsseldorf 1978.
11. I. Müller, Thermodynamik, Bertelsmann Universitätsverlag, Düsseldorf 1973.
12. K. Wilmanski, Grundbegriffe der Kontinuumsmechanik, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1990.
13. K. Wilmanski, Acceleration waves in two-component porous media, Part II: Supplementary remarks on the model and the evolution of amplitudes, MECH – Bericht 95/2, Universität GH-Essen, 1995.
14. K. Wilmanski, Quasi-static plane-strain problems of the linear porous material, MECH – Bericht 95/7, Universität GH-Essen, 1995.
15. K. Wilmanski, Papers on the theory of porous materials 1993 – 1996, Universität GH-Essen, 1996.